

38장: 광자와 물질파

Photons and Matter Waves

양자물리의 세계로

37장의 상대성이론이 **아주 빠른 세계**의 물리였다면, 이번 장부터는 **아주 작은 세계** — 원자와 전자의 세계로 들어간다. 이 세계를 다루는 물리가 **양자물리(quantum physics)**이다.

양자물리가 답하는 질문들:

- 별은 왜 빛나는가?
- 주기율표의 규칙성은 어디서 오는가?
- 반도체와 트랜지스터는 어떻게 작동하는가?
- 구리는 전기가 통하는데 유리는 왜 안 통하는가?

화학 전체가 양자물리 위에 서 있으므로, 생명 현상을 이해하는 데에도 양자물리가 필요하다.

양자물리는 일상 기술 속에 있다



- **태양전지(solar cell)** : 광자 한 개가 전자 한 개를 들뜨게 한다 — 이번 강의 광전효과
- **디지털카메라 CCD** : 화소마다 광자를 전자로 바꿔 세는 장치
- **전자현미경, 플래시 메모리, STM** : 물질파와 터널링의 응용

이번 장의 두 가지 핵심 질문

1. 빛은 파동인가, 입자인가?

- 간섭·회절은 파동이라 말하고, 광전효과·콤프턴 산란은 입자(광자)라 말한다

2. 전자는 입자인가, 파동인가?

- 점처럼 검출되지만, 이중슬릿을 지나면 간섭무늬를 만든다

답: **둘 다이다**. 그리고 이 이중성을 정확히 다루는 언어가 **확률파 (probability wave)** 와 **파동함수(wave function)** 이다.

38.1 광자, 빛의 양자

양자화란 무엇인가

어떤 물리량이 **최소 단위의 정수배로만** 존재할 때, 그 양이 **양자화(quantized)** 되어 있다고 하고, 최소 단위를 **양자(quantum)** 라 부른다.

일상의 비유 — 현금:

- 현금 거래의 최소 단위가 10원이라면, 모든 금액은 $n \times 10$ 원 꼴이다
- 755.5원을 건넬 수는 없다 — 금액은 10원 단위로 **양자화** 되어 있다

1905년 아인슈타인은 **빛(전자기파)의 에너지도 양자화되어 있다** 고 제안했다. 그 에너지 양자가 바로 **광자(photon)** 이다.

광자 한 개의 에너지

진동수 f 인 빛의 양자(광자) 한 개가 갖는 에너지는:

$$E = hf$$

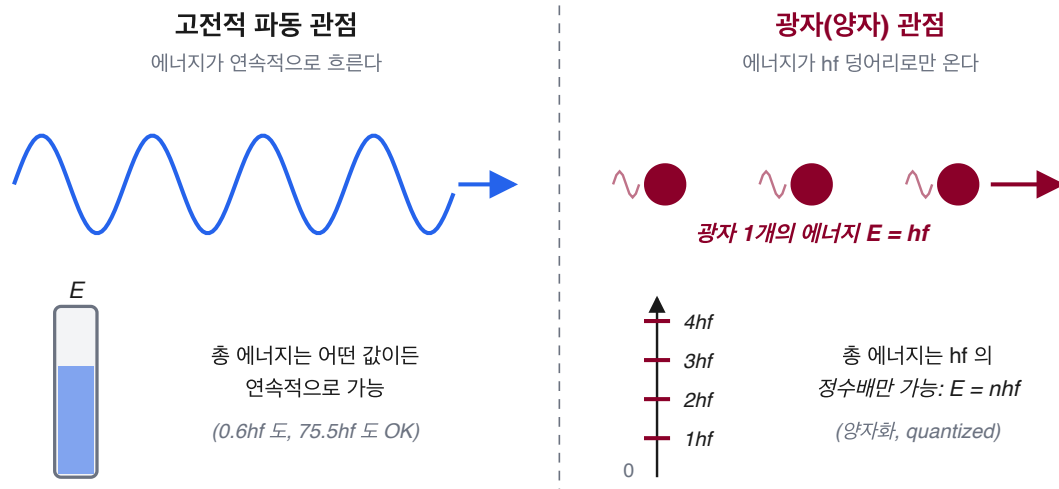
여기서 h 는 **플랑크 상수(Planck constant)** :

$$h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} = 4.14 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$$

진동수와 파장의 관계 $f = c/\lambda$ 를 쓰면 $E = hc/\lambda$ 로도 쓸 수 있다.

진동수 f 인 빛의 총 에너지는 반드시 hf 의 **정수배** 이다. $0.6hf$ 나 $75.5hf$ 같은 에너지는 존재하지 않는다.

파동 관점 vs 광자 관점



고전 전자기학에서 빛의 에너지는 연속적으로 흐르지만, 양자물리에서는 hf 크기의 **덩어리(quantum)** 로만 주고받는다.

광자의 흡수와 방출

빛이 물질과 에너지를 주고받는 사건은 **원자 단위** 에서 일어난다.

- **흡수(absorption)** : 광자 하나가 사라지고, 원자가 에너지 hf 를 얻는다
- **방출(emission)** : 원자가 에너지 hf 를 내놓으며 광자 하나가 생겨난다

에너지 크기의 감을 잡아 보자. 편리한 조합 $hc = 1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}$ 을 쓰면:

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{550 \text{ nm}} \approx 2.25 \text{ eV}$$

가시광 광자 한 개의 에너지는 **몇 eV 수준** — 원자 속 전자의 에너지 스케일과 정확히 같다. 그래서 빛과 원자는 서로 잘 반응한다.

예제: 나트륨등이 내뿜는 광자 수

출력 $P = 100 \text{ W}$ 인 나트륨등이 파장 $\lambda = 590 \text{ nm}$ 의 빛만 낸다고 하자. 초당 방출되는 광자 수 R 는?

광자 한 개의 에너지가 $E = hf = hc/\lambda$ 이므로:

$$R = \frac{\text{초당 방출 에너지}}{\text{광자 한 개의 에너지}} = \frac{P}{hc/\lambda} = \frac{P\lambda}{hc}$$

값을 대입하면:

$$R = \frac{(100 \text{ W})(590 \times 10^{-9} \text{ m})}{(6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})(2.998 \times 10^8 \text{ m/s})}$$

$$R \approx 2.97 \times 10^{20} \text{ 개/s}$$

초당 10^{20} 개 — 낱알성이 전혀 느껴지지 않을 만큼 많다. 그래서 일상에서 빛은 연속적인 파동처럼 보인다.

38.2 광전효과

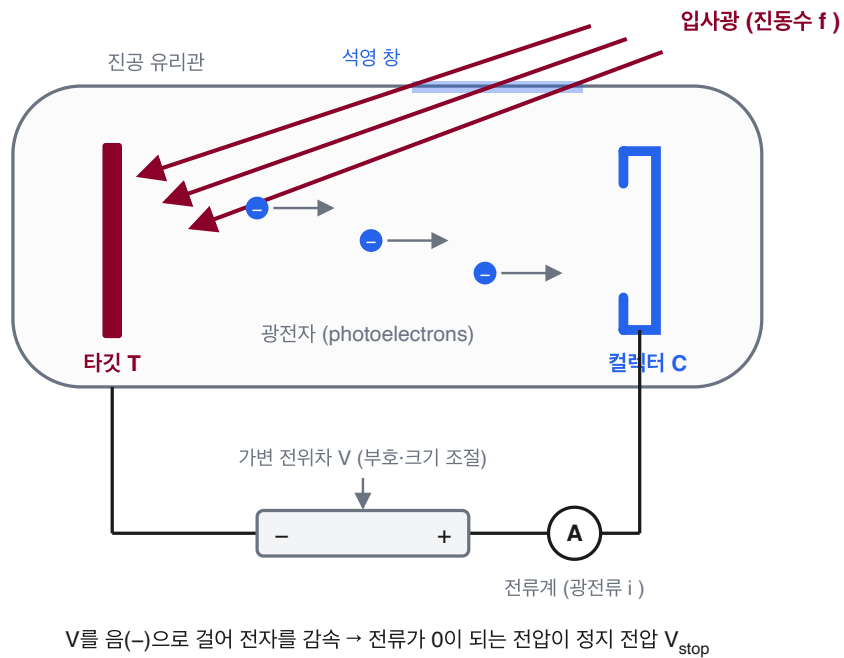
빛이 전자를 두드려 꺼낸다

깨끗한 금속 표면에 충분히 짧은 파장의 빛을 쬐면 표면에서 **전자가 튀어나온다**. 이것이 **광전효과(photoelectric effect)**, 튀어나온 전자가 **광전자(photoelectron)** 이다.

- 1888년경 실험으로 발견되었지만, 고전 파동 이론으로는 설명되지 않았다
- 1905년 아인슈타인이 광자 개념으로 설명 — 1921년 노벨 물리학상
- 오늘날 광센서, 광전관, 이미지 센서의 원리

두 가지 실험 결과가 고전물리를 곤란하게 만들었다. 차례로 보자.

실험 장치



- 진공관 안의 금속 타겟 T에 진동수 f 의 빛을 쬔다
- 튀어나온 광전자가 컬렉터 C에 도달하면 회로에 **광전류(photoelectric current) i** 가 흐른다
- 전위차 V 의 부호와 크기를 조절할 수 있다

정지 전압

컬렉터를 타깃보다 **음(-)** 으로 만들면 전자가 감속된다. V 를 키우다 보면 어느 값에서 전류가 정확히 0이 된다. 이 값이 **정지 전압(stopping potential)** V_{stop} 이다.

전류가 0이 되려면 **가장 빠른 전자** 까지 컬렉터 직전에 되돌아가야 한다. 전하 e 가 전위차를 거슬러 오르며 잃는 운동에너지가 eV_{stop} 이므로:

$$K_{\text{max}} = eV_{\text{stop}}$$

즉 정지 전압을 재면 광전자의 **최대 운동에너지** 를 알 수 있다.

첫 번째 실험: 세기를 바꿔 보면

빛의 진동수를 고정하고 **세기(intensity)** 만 바꾸면?

실험 결과 : $K_{\max}$ 는 빛의 세기와 **무관하다**. 눈부시게 밝은 빛이든 희미한 빛이든 최대 운동에너지는 똑같다.

고전 파동 이론의 예측:

- 센 빛 = 큰 진폭의 전기장 = 전자를 더 세게 흔들
- 따라서 세기가 클수록 전자가 더 큰 에너지로 튀어나와야 한다 → **틀렸다!**

광자 관점의 설명: 전자 하나는 광자 **한 개** 에게서만 에너지를 받는다. 세기를 높이면 광자 **수** 가 늘어날 뿐, 광자 한 개의 에너지 hf 는 그대로다.

두 번째 실험: 진동수를 바꿔 보면

이번에는 진동수 f 를 바꾸며 V_{stop} 을 잰다.

실험 결과 : 문턱 진동수(cutoff frequency) f_0 가 존재한다. $f < f_0$ 이면 빛을 아무리 세게 쬔어도 전자가 **전혀** 나오지 않는다.

고전 파동 이론의 예측:

- 어떤 진동수든 세기만 충분하면 전자가 에너지를 모아 탈출할 수 있어야 한다 → **틀렸다!**

광자 관점의 설명: 전자가 금속을 탈출하려면 최소 에너지 Φ 가 필요하다. 광자 한 개의 에너지 hf 가 Φ 보다 작으면, 광자가 아무리 많아도(= 빛이 아무리 세도) 전자는 탈출할 수 없다.

광전 방정식

아인슈타인은 광자 한 개 흡수에 대한 **에너지 보존** 으로 실험을 정리했다:

$$hf = K_{\max} + \Phi$$

- hf : 흡수한 광자 한 개의 에너지
- Φ : **일함수(work function)** — 전자가 금속 표면의 전기적 속박을 끊고 탈출하는 데 필요한 최소 에너지 (물질 고유의 값)
- $K_{\max}$: 탈출 과정에서 추가 손실이 없었던 가장 운 좋은 전자의 운동에너지

문턱 진동수는 $K_{\max} = 0$ 일 때이므로:

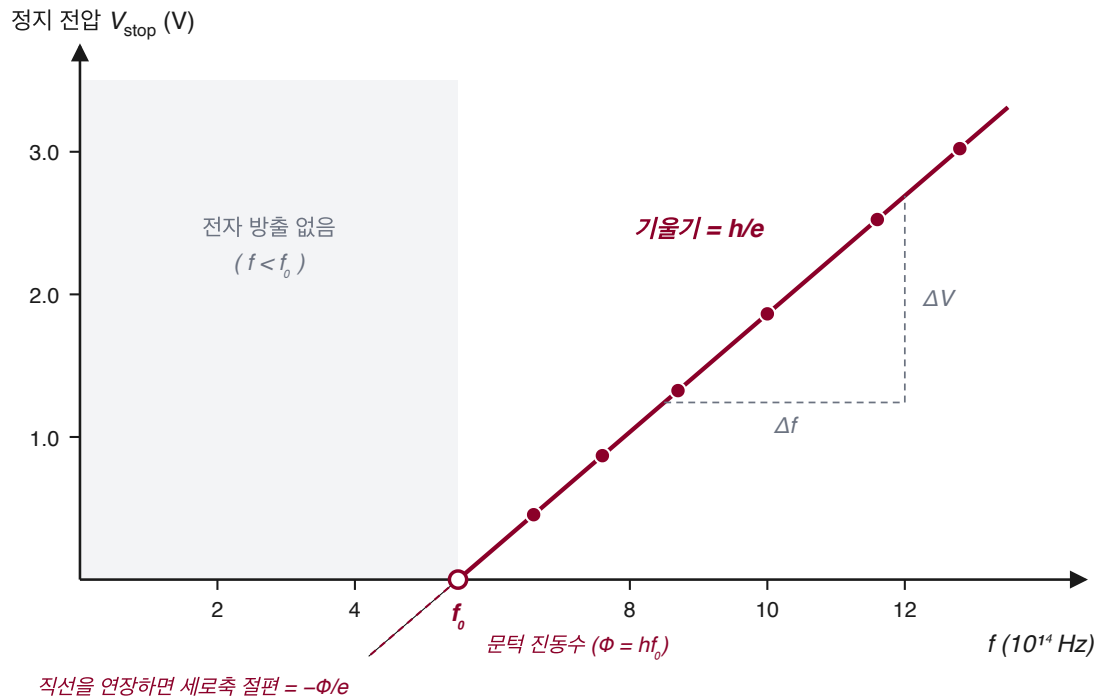
$$f_0 = \frac{\Phi}{h}, \quad \lambda_0 = \frac{c}{f_0} = \frac{hc}{\Phi}$$

정지 전압-진동수 그래프

광전 방정식에 $K_{\max} = eV_{\text{stop}}$ 을 대입하고 e 로 나누면:

$$V_{\text{stop}} = \left(\frac{h}{e} \right) f - \frac{\Phi}{e}$$

V_{stop} 을 f 에 대해 그리면 **직선**이다.



- 기울기 = h/e : 금속 종류와 무관한 보편 상수!
- 가로축 절편 = f_0 , 세로축 절편(연장선) = $-\Phi/e$

밀리컨의 측정: 기울기에서 h 가 나온다

1916년 밀리컨(R. A. Millikan)이 나트륨 타겟으로 켄 데이터에서 직선의 기울기를 읽으면:

$$\frac{h}{e} = \frac{\Delta V}{\Delta f} = \frac{2.35 \text{ V} - 0.72 \text{ V}}{(11.2 - 7.2) \times 10^{14} \text{ Hz}} \approx 4.1 \times 10^{-15} \text{ V} \cdot \text{s}$$

여기에 기본 전하 e 를 곱하면:

$$h = (4.1 \times 10^{-15})(1.6 \times 10^{-19}) \approx 6.6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

다른 방법으로 측정한 플랑크 상수와 정확히 일치한다. 광자 가설의 강력한 증거였다.

예제: 나트륨의 일함수

밀리컨의 그래프에서 나트륨의 문턱 진동수는 $f_0 = 5.5 \times 10^{14}$ Hz였다. 나트륨의 일함수를 구하라.

문턱에서는 $K_{\max} = 0$ 이므로 광자 에너지 전부가 탈출에 쓰인다:

$$hf_0 = 0 + \Phi \quad \Rightarrow \quad \Phi = hf_0$$

값을 대입하면:

$$\Phi = (6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})(5.5 \times 10^{14} \text{ Hz}) = 3.6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$\boxed{\Phi \approx 2.3 \text{ eV}}$$

금속마다 다른 일함수

금속	Φ (eV)	문턱 파장 $\lambda_0 = hc/\Phi$
세슘 (Cs)	2.14	579 nm (노란빛)
나트륨 (Na)	2.28	544 nm (초록빛)
칼륨 (K)	2.30	539 nm (초록빛)
알루미늄 (Al)	4.28	290 nm (자외선)
백금 (Pt)	5.65	219 nm (자외선)

- **가시광** 으로 광전자를 얻으려면 일함수가 작은 알칼리 금속이 필요하다
- 백금은 자외선을 쬔어야만 전자가 나온다

시뮬레이션: 광전효과 실험실 — 진동수·세기·정지 전압과 금속별 일함수

실생활: 태양전지와 이미지 센서

태양전지 : 반도체 내부의 광전효과. 광자가 전자를 띠틈(band gap) E_g 위로 올려 전류를 만든다.

- 실리콘의 띠틈 $E_g \approx 1.1 \text{ eV} \rightarrow \lambda_0 = 1240/1.1 \approx 1100 \text{ nm}$
- 이보다 긴 파장(적외선 대부분)은 아무리 강해도 발전에 기여하지 못한다
— 광전효과의 문턱 조건과 같은 논리

디지털카메라 CCD/CMOS 센서 : 각 화소가 광자를 흡수해 전자를 만들고, 쌓인 전자 수를 읽어 밝기를 잰다.

- 광자 수를 세는 장치이므로, 어두운 사진의 자글자글한 **노이즈** 는 광자 수의 통계적 요동이 그대로 보이는 것이다

38.3 광자의 운동량과 콤프턴 산란

광자는 운동량도 갖는다

1916년 아인슈타인은 광자 개념을 확장했다: 에너지 hf 인 광자는 **선운동량 (linear momentum)** 도 갖는다.

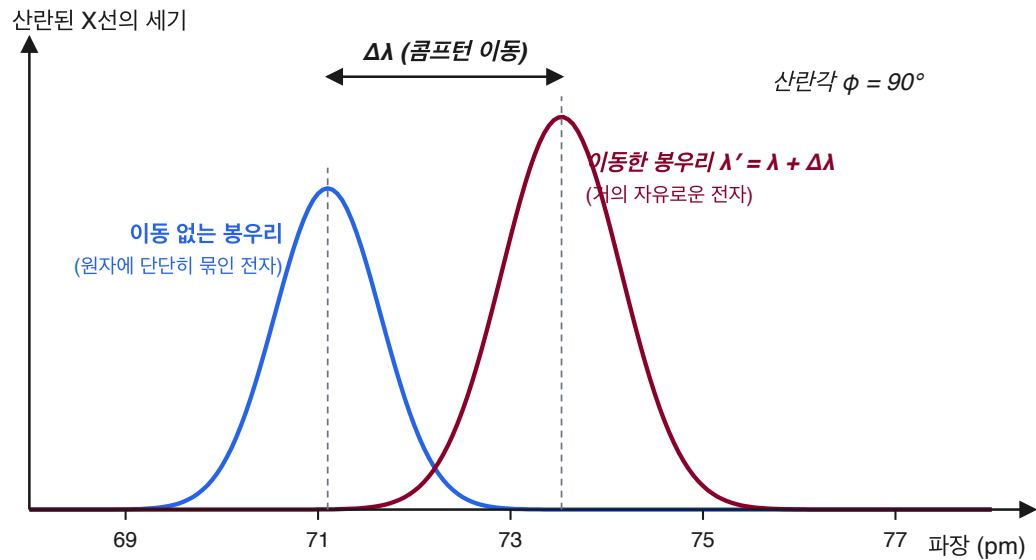
$$p = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

($f = c/\lambda$ 를 대입한 것이다.)

- 광자는 질량이 없지만 운동량은 있다 — 상대론에서 질량 없는 입자는
$$E = pc$$
- 빛이 물질과 상호작용할 때는 에너지와 운동량이 **당구공 충돌처럼** 한 점에서 전달된다

콤프턴 실험 (1923)

콤프턴(A. Compton)은 파장 $\lambda = 71.1 \text{ pm}$ 의 X선을 탄소 타겟에 쬔고, 여러 산란각 ϕ 에서 산란된 X선의 파장을 측정했다.



산란된 X선에는 **두 개의 봉우리**가 나타났다: 원래 파장 λ 그대로인 봉우리와, $\Delta\lambda$ 만큼 **길어진** 봉우리 λ' . 이동량 $\Delta\lambda$ — **콤프턴 이동(Compton shift)** — 는 산란각이 클수록 커졌다.

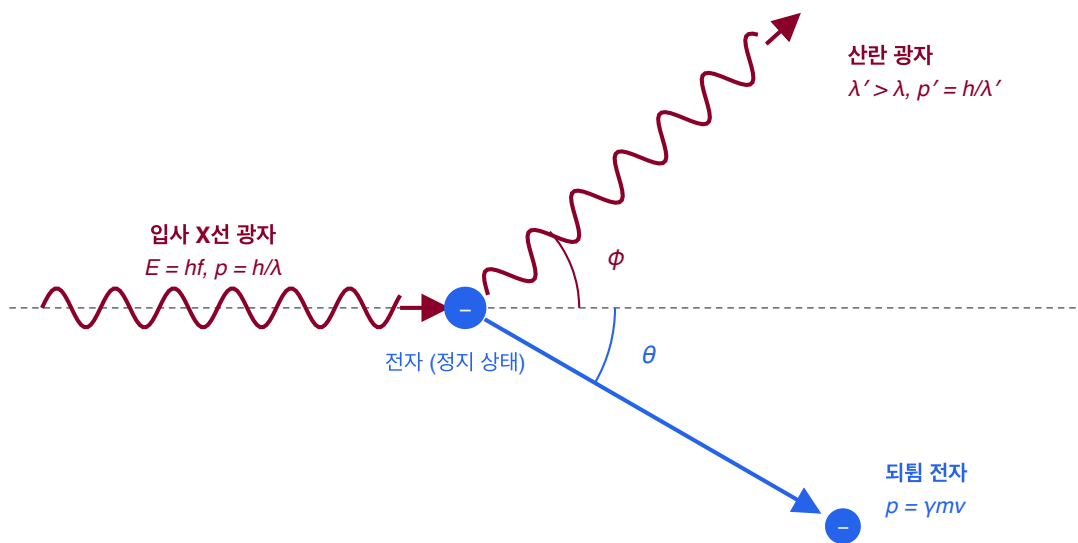
고전물리의 예측은?

고전 전자기학으로 생각해 보자:

- 입사 X선은 진동수 f 로 진동하는 전자기파
- 타겟의 전자는 이 파의 전기장에 밀려 **같은 진동수 f 로** 진동한다
- 진동하는 전자는 작은 안테나처럼 **같은 진동수의** 전자기파를 재방출해야 한다

즉 산란된 X선의 파장은 입사 X선과 **같아야** 한다. 그러나 실험은 **더 긴 파장**을 보여 주었다. 또 하나의 고전물리 실패.

광자 그림: 광자-전자 충돌



콤프턴의 해석: 광자 한 개가 거의 자유로운 전자 한 개와 **탄성 충돌** 한다. 광자가 에너지·운동량 일부를 전자에게 주므로, 산란 광자는 에너지가 줄고($E' = hf' < hf$) 파장이 길어진다($\lambda' > \lambda$).

이제 에너지·운동량 보존으로 $\Delta\lambda$ 를 정량적으로 유도하자.

유도 1단계: 에너지 보존

정지한 전자(질량 m)에 광자가 충돌하여, 광자는 각 ϕ 로, 전자는 각 θ 로 튕어나간다.

에너지 보존:

$$hf = hf' + K$$

전자는 빛의 속도에 견줄 만큼 빨라질 수 있으므로 **상대론적 운동에너지**를 써야 한다 (37장):

$$K = mc^2(\gamma - 1), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

$f = c/\lambda$, $f' = c/\lambda'$ 를 대입하고 양변을 c 로 나누면:

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'} + mc(\gamma - 1) \quad (1)$$

유도 2단계: 운동량 보존

광자의 운동량은 h/λ (입사), h/λ' (산란), 전자의 상대론적 운동량은 $p = \gamma mv$ 이다. 2차원 충돌이므로 성분별로:

$$x : \quad \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'} \cos \phi + \gamma mv \cos \theta \quad (2)$$

$$y : \quad 0 = \frac{h}{\lambda'} \sin \phi - \gamma mv \sin \theta \quad (3)$$

식 (1), (2), (3)에는 다섯 변수 $\lambda, \lambda', v, \phi, \theta$ 가 들어 있다. 우리가 원하는 것은 $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ 와 ϕ 의 관계이므로, 전자에 관한 v 와 θ 를 **소거** 한다.

유도 3단계: θ 소거

식 (2), (3)을 전자 항이 홀로 남게 정리한다:

$$\gamma m v \cos \theta = \frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'} \cos \phi, \quad \gamma m v \sin \theta = \frac{h}{\lambda'} \sin \phi$$

양변을 각각 제곱해 더하면 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ 이므로 θ 가 사라진다:

$$\gamma^2 m^2 v^2 = \frac{h^2}{\lambda^2} - \frac{2h^2}{\lambda\lambda'} \cos \phi + \frac{h^2}{\lambda'^2} \quad (4)$$

(전개 과정: $\cos \phi$ 의 교차항 $-2\frac{h}{\lambda}\frac{h}{\lambda'} \cos \phi$ 만 남고, $\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$ 로 $\frac{h^2}{\lambda'^2}$ 항이 합쳐진다.)

유도 4단계: v 소거

에너지식 (1)을 $\gamma mc = mc + \frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'}$ 로 정리하고 제곱하면:

$$\gamma^2 m^2 c^2 = m^2 c^2 + 2mc \left(\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'} \right) + \left(\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'} \right)^2 \quad (5)$$

여기서 항등식을 하나 쓰자. $\gamma^2(c^2 - v^2) = c^2$ 이므로:

$$\gamma^2 m^2 c^2 - \gamma^2 m^2 v^2 = m^2 c^2$$

식 (5)에서 식 (4)를 빼면 좌변이 정확히 $m^2 c^2$ 가 되어 v 도 사라진다.

유도 5단계: 정리

식 (5) - 식 (4)를 쓰면 $\left(\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'}\right)^2$ 전개 시 $\frac{h^2}{\lambda^2} + \frac{h^2}{\lambda'^2}$ 항이 약분된다):

$$m^2 c^2 = m^2 c^2 + 2mch \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) - \frac{2h^2}{\lambda\lambda'} + \frac{2h^2}{\lambda\lambda'} \cos \phi$$

$$0 = 2mch \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda\lambda'} - \frac{2h^2}{\lambda\lambda'} (1 - \cos \phi)$$

양변에 $\frac{\lambda\lambda'}{2mch}$ 를 곱하면:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \phi)$$

콤프턴의 실험 결과와 정확히 일치한다.

콤프턴 파장

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\phi)$$

앞의 상수 h/mc 를 **콤프턴 파장(Compton wavelength)** 이라 한다. 전자에 대해:

$$\frac{h}{m_e c} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{(9.11 \times 10^{-31})(3.00 \times 10^8)} = 2.43 \text{ pm}$$

- $\phi = 0$ (스쳐 지나감): $\Delta\lambda = 0$ — 에너지 전달 없음
- $\phi = 180^\circ$ (정면 되튐): $\Delta\lambda = 2h/mc = 4.86 \text{ pm}$ — 최대 전달
- **이동 없는 봉우리**의 정체: 원자에 단단히 묶인 전자와의 충돌은 사실상 **원자 전체**(m 이 약 22,000배)와의 충돌 $\rightarrow \Delta\lambda$ 가 22,000배 작아져 측정 불가

예제: 콤프턴 산란의 이동량

파장 $\lambda = 22 \text{ pm}$ 의 X선이 탄소 타겟에서 산란되어 $\phi = 85^\circ$ 에서 검출된다.

(a) 콤프턴 이동은? (b) 광자가 잃는 에너지 비율은?

(a) 산란 상대는 전자이므로 $h/m_e c = 2.43 \text{ pm}$ 을 쓴다:

$$\Delta\lambda = (2.426 \text{ pm})(1 - \cos 85^\circ) = (2.426)(1 - 0.0872) \approx 2.21 \text{ pm}$$

(b) 잃는 비율은 $\frac{E - E'}{E} = \frac{hc/\lambda - hc/\lambda'}{hc/\lambda} = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda'} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda + \Delta\lambda}$:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda + \Delta\lambda} = \frac{2.21}{22 + 2.21} \approx 0.091 = 9.1\%$$

$\Delta\lambda$ 자체는 λ 와 무관하지만, **비율**은 λ 가 짧을수록 크다. 가시광($\lambda \approx 500 \text{ nm}$)이면 비율이 10^{-5} 수준이라 관측이 어렵다 — 콤프턴이 X선을 쓴 이유다.

빛은 확률파다: 이중슬릿 다시 보기

35장의 영(Young) 이중슬릿 실험에서, 스크린 자리에 작은 **광자 검출기 D**를 놓아 보자.

- 검출기는 무작위한 시간 간격으로 **딸깍!** 하고 광자를 하나씩 흡수한다 (입자성)
- 검출기를 위아래로 옮기면 **클릭 빈도** 가 밝은 무늬 자리에서 크고, 어두운 무늬 자리에서 작다 (파동성)

이 실험을 정리하는 관점:

어느 점 근처의 작은 부피에 광자가 검출될 확률(단위 시간당)은 그 점에서 빛의 전기장 진폭의 제곱 E_m^2 에 비례한다.

빛은 전자기파이면서 동시에 **확률파(probability wave)** 이다 — 파동이 각 점에 광자 검출 확률을 실어 나르고, 검출은 날개의 광자로 일어난다.

단일 광자 실험

"광자가 많아서 서로 간섭하는 것 아닐까?" — 1909년 테일러(G. I. Taylor)가 검증했다.

- 광원을 극도로 어둡게 하여 장치 안에 광자가 **한 번에 한 개** 만 있게 했다
- 그래도 오래 기다리면 스크린에 간섭무늬가 쌓였다! 광자 하나가 **두 슬릿을 모두 지나** 자기 자신과 간섭한 것이다
- 1992년 실험(Lai & Diels)은 슬릿 대신 **거의 정반대 방향** 의 두 경로로도 같은 결론을 얻었다

이중슬릿 실험의 모든 버전은 세 가지로 정리된다:

1. 빛은 광원에서 **광자로 생성** 된다
2. 빛은 검출기에서 **광자로 흡수** 된다
3. 빛은 그 사이를 **확률파로 이동** 한다 — 검출 위치는 확률로만 예측된다

38.5 전자와 물질파

드브로이의 대칭 논리 (1924)

프랑스의 드브로이(Louis de Broglie)는 대칭성에 호소했다:

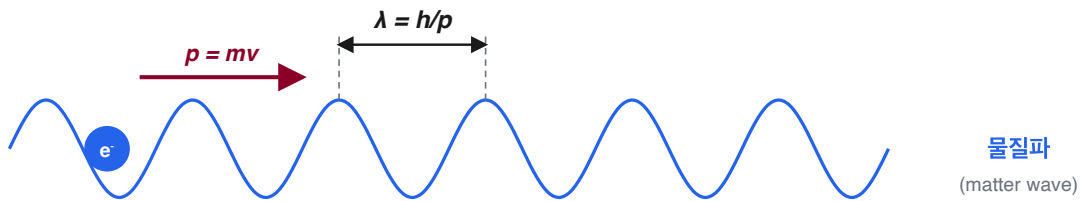
- 빛은 **파동** 인데, 에너지와 운동량은 **점(광자)** 으로 전달한다
- 그렇다면 전자 같은 **입자** 의 빔도 **파동** 성질을 갖지 않을까?

광자에 쓰던 $p = h/\lambda$ 를 뒤집어, 운동량 p 인 입자에 파장을 부여하자:

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{p}} \quad (\text{드브로이 파장})$$

움직이는 모든 입자는 **물질파(matter wave)** 로 행동한다는 대담한 가설이다.

왜 야구공의 파동성은 안 보일까



전자 ($K = 120 \text{ eV}$)

$\lambda \approx 112 \text{ pm} \approx \text{원자 크기}$
→ 결정 격자에서 회절·간섭이
실제로 관측된다

야구공 ($0.145 \text{ kg}, 40 \text{ m/s}$)

$\lambda = h/p \approx 1.1 \times 10^{-34} \text{ m}$
→ 어떤 슬릿보다도 터무니없이 작아
파동성이 전혀 드러나지 않는다

- 전자: λ 가 원자 크기($\sim 0.1 \text{ nm}$) → 결정 격자가 훌륭한 "슬릿"이 되어 회절이 보인다
- 야구공: $\lambda \sim 10^{-34} \text{ m}$ → 어떤 구조물보다도 압도적으로 작아 파동성이 드러날 수 없다

실험 검증: 전자 회절

1927년 데이비슨-저머(Davisson-Germer)와 톰슨(G. P. Thomson)이 독립적으로 확인했다.

같은 파장의 X선과 전자빔을 각각 알루미늄 결정 가루 타겟에 쏘면:

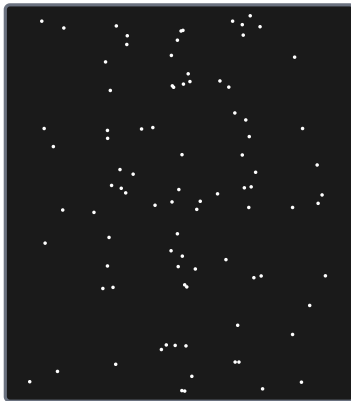
- X선(전자기파): 동심원 회절 무늬
- 전자빔(물질파): **기하학적으로 똑같은** 동심원 회절 무늬!

전자는 결정 격자에서 파동처럼 회절한다. $\lambda = h/p$ 로 계산한 파장이 실험과 정확히 일치했다. (드브로이는 1929년, 데이비슨과 톰슨은 1937년 노벨상.)

오늘날 전자 회절과 중성자 회절은 고체·표면 구조 분석의 표준 도구다.

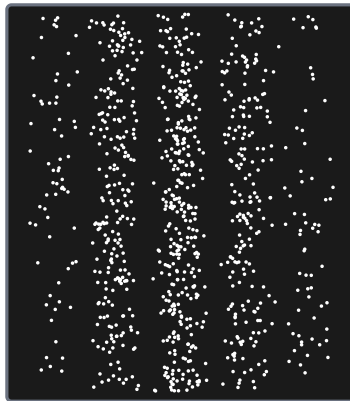
전자 이중슬릿: 한 개씩 보내도 무늬가 생긴다

전자를 한 번에 한 개씩 보내며 스크린의 도달 위치를 기록

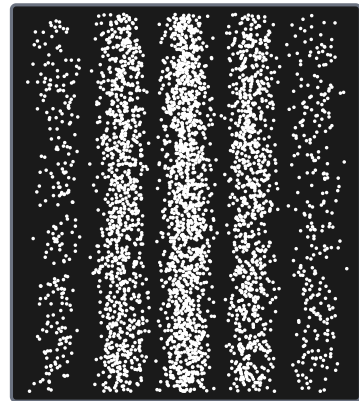


(a) 약 100개

점처럼 도달 (입자성)



(b) 약 3000개



(c) 약 70000개

쌓이면 간섭무늬 (파동성)

- 전자 하나하나는 스크린에 **점** 으로 도달한다 (입자성)
- 수만 개가 쌓이면 **간섭무늬** 가 나타난다 (파동성)
- 전자 하나가 물질파로서 **두 슬릿을 모두 지나** 자신과 간섭하고, 그 간섭이 도달 **확률** 을 결정한다

빛에서 본 확률파 개념이 전자에도 그대로 적용된다. 물질파도 **확률파** 다.

물질파는 어디까지 확인되었나

이중슬릿(또는 회절) 간섭이 실험으로 확인된 입자들:

- 전자, 양성자, 중성자 — 기본 입자급
- 원자들 (He, Na, ...)
- 1994년: 요오드 분자 I_2 (전자보다 50만 배 무겁다)
- 1999년: 풀러렌 C_{60} , C_{70} — 탄소 60~70개짜리 축구공 분자

물체가 클수록 $\lambda = h/p$ 가 급격히 작아져 파동성이 사라진다. 전자는 자신과 간섭할 수 있지만, 고양이는 자신과 간섭하지 않는다.

예제: 전자의 드브로이 파장

운동에너지 $K = 120 \text{ eV}$ 인 전자의 드브로이 파장은?

K 가 전자의 정지 에너지(0.511 MeV)보다 훨씬 작으므로 비상대론적으로

$$p = \sqrt{2mK}:$$

$$p = \sqrt{2(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(120 \text{ eV})(1.60 \times 10^{-19} \text{ J/eV})}$$

$$p = 5.91 \times 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

드브로이 관계식에 대입하면:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{5.91 \times 10^{-24}} = 1.12 \times 10^{-10} \text{ m} = \boxed{112 \text{ pm}}$$

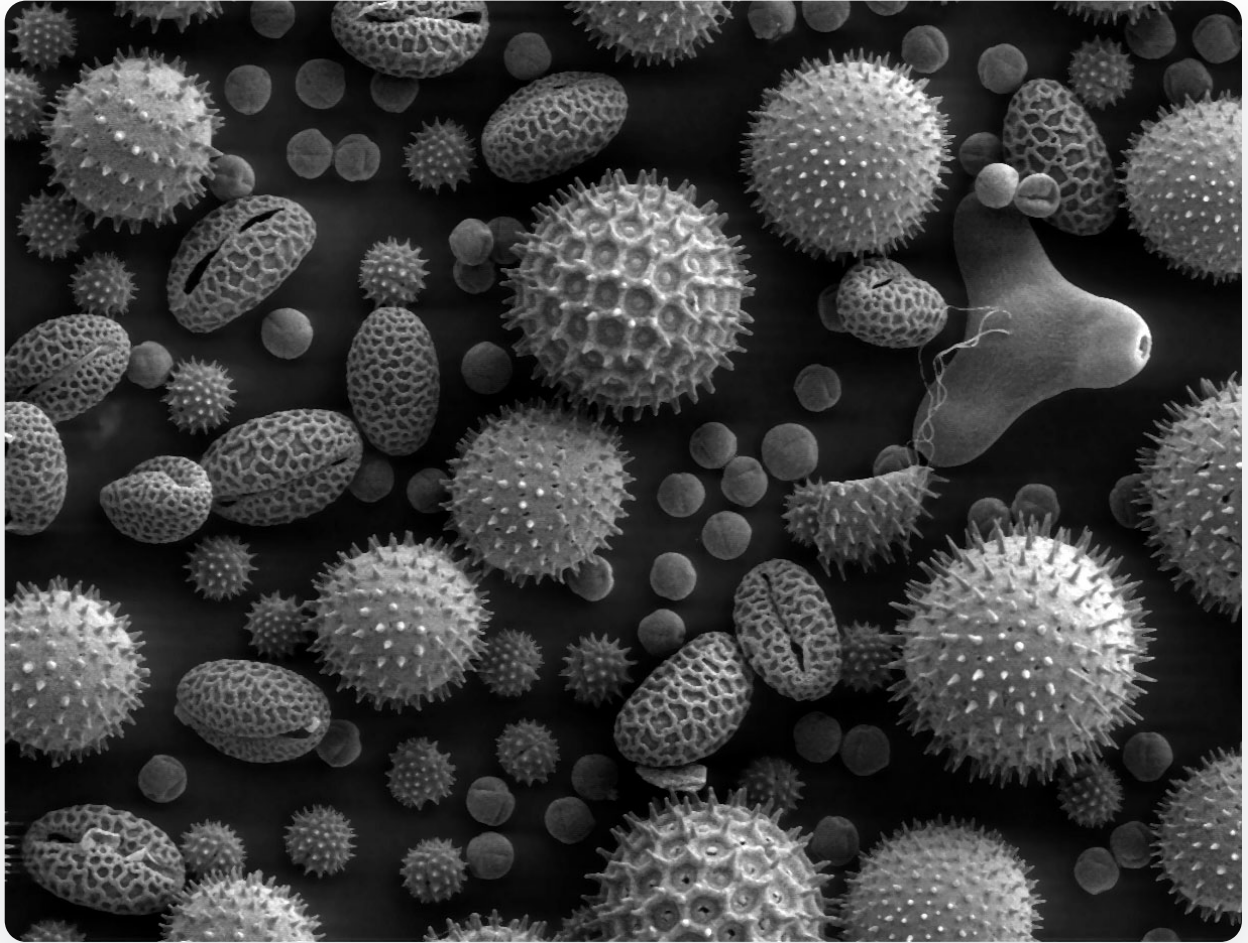
원자 하나의 크기와 같은 수준이다. 에너지를 높이면 파장은 더 짧아진다.

실생활: 전자현미경



현미경의 분해능은 **파장** 이 결정한다(36장 회절 한계). 광학현미경은 $\sim 200\text{ nm}$ 에서 막히지만, 100 keV 전자의 드브로이 파장은 3.7 pm — 원자 하나까지 구분할 수 있다.

전자현미경이 보여 주는 세계



주사전자현미경(SEM)으로 본 꽃가루. 가시광으로는 절대 볼 수 없는 미세 구조가 드러난다. 전자의 **물질파**가 없었다면 불가능한 이미지다.

38.6 슈뢰딩거 방정식

물질파를 기술하는 양은 무엇인가

모든 파동은 "무엇이 진동하는가"로 기술된다:

- 줄의 파동: 변위 $y(x, t)$ / 음파: 압력 / 빛: 전기장 $\vec{E}(x, y, z, t)$
- 물질파: **파동함수(wave function)** $\Psi(x, y, z, t)$

Ψ 는 일반적으로 **복소수** 값을 갖는다($a + ib$ 꼴). 시간과 공간은 분리할 수 있어서:

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) e^{-i\omega t}$$

여기서 $\omega = 2\pi f$ 는 물질파의 각진동수이고, ψ 는 공간 부분이다.

파동함수의 의미: 확률 밀도

ψ 자체는 관측량이 아니다. 물리적 의미를 갖는 것은 절댓값의 제곱이다:

어느 점 근처의 작은 부피에서 입자가 검출될 확률은 그 점의 **확률 밀도 (probability density)** $|\psi|^2$ 에 비례한다.

복소수 ψ 의 절댓값 제곱은 **복소켈레(complex conjugate)** ψ^* ($i \rightarrow -i$ 로 바꾼 것)를 곱해 계산한다:

$$|\psi|^2 = \psi^* \psi \geq 0$$

ψ 가 복소수라도 $|\psi|^2$ 는 항상 실수이고 음이 아니다 — 확률로 해석할 수 있는 이유다. 빛의 확률파에서 E_m^2 이 하던 역할을 물질파에서는 $|\psi|^2$ 이 한다.

슈뢰딩거 방정식 (1926)

줄의 파동은 뉴턴 역학이, 빛은 맥스웰 방정식이 지배한다. 비상대론적 입자의 물질파를 지배하는 방정식은 슈뢰딩거(E. Schrödinger)가 제시했다.

퍼텐셜 에너지 $U(x)$ 속에서 x 방향으로 움직이는 입자(1차원)의 경우:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2} [E - U(x)] \psi = 0$$

- E : 입자의 총 역학적 에너지 (질량 에너지는 포함하지 않음)
- 이 식은 더 근본적인 원리에서 **유도되지 않는다** — 뉴턴의 제2법칙처럼 그 자체가 기본 원리다
- 검증은 오직 실험: 100년째 모든 실험과 일치한다

자유 입자 꼴로 단순화

U 가 일정한 경우(자유 입자는 $U = 0$), $E - U$ 는 운동에너지다. 비상대론적으로:

$$E - U = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m} \left(\frac{h}{\lambda} \right)^2$$

마지막에 드브로이 관계 $p = h/\lambda$ 를 썼다. **각파수(angular wave number)** $k = 2\pi/\lambda$ 를 도입하면 $\lambda = 2\pi/k$ 이므로:

$$E - U = \frac{1}{2m} \left(\frac{kh}{2\pi} \right)^2 \Rightarrow \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - U) = k^2$$

슈뢰딩거 방정식이 깔끔해진다:

$$\boxed{\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0, \quad k = \frac{2\pi\sqrt{2m(E - U)}}{h}}$$

일반해와 오일러 공식

$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0$ 의 일반해는:

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

(두 번 미분하면 $-k^2\psi$ 가 되어 대입 시 항등식이 됨을 바로 확인할 수 있다.)

지수함수와 삼각함수는 **오일러 공식(Euler's formula)** 으로 오간다:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

시간 인자 $e^{-i\omega t}$ 를 붙이면 $Ae^{i(kx-\omega t)}$ 는 $+x$ 방향, $Be^{-i(kx+\omega t)}$ 는 $-x$ 방향 진행파 — 16장의 $kx \mp \omega t$ 규칙 그대로다.

자유 입자의 확률 밀도

$+x$ 방향으로만 움직이는 자유 입자를 보자 ($B = 0$):

$$\psi(x) = Ae^{ikx}$$

확률 밀도를 계산하면:

$$|\psi|^2 = |Ae^{ikx}|^2 = A^2 |e^{ikx}|^2$$

그런데 $|e^{ikx}|^2 = (e^{ikx})(e^{ikx})^* = e^{ikx}e^{-ikx} = e^0 = 1$ 이므로:

$$|\psi|^2 = A^2 = \text{모든 } x \text{에서 일정}$$

입자가 **어디에서나 같은 확률** 로 발견된다! 자동차처럼 "어디를 지나가는 중"이라고 말할 수 없다. **측정하기 전에는 위치라는 것이 정해져 있지 않다.**

38.7 하이젠베르크 불확정성 원리

위치와 운동량은 동시에 정확할 수 없다

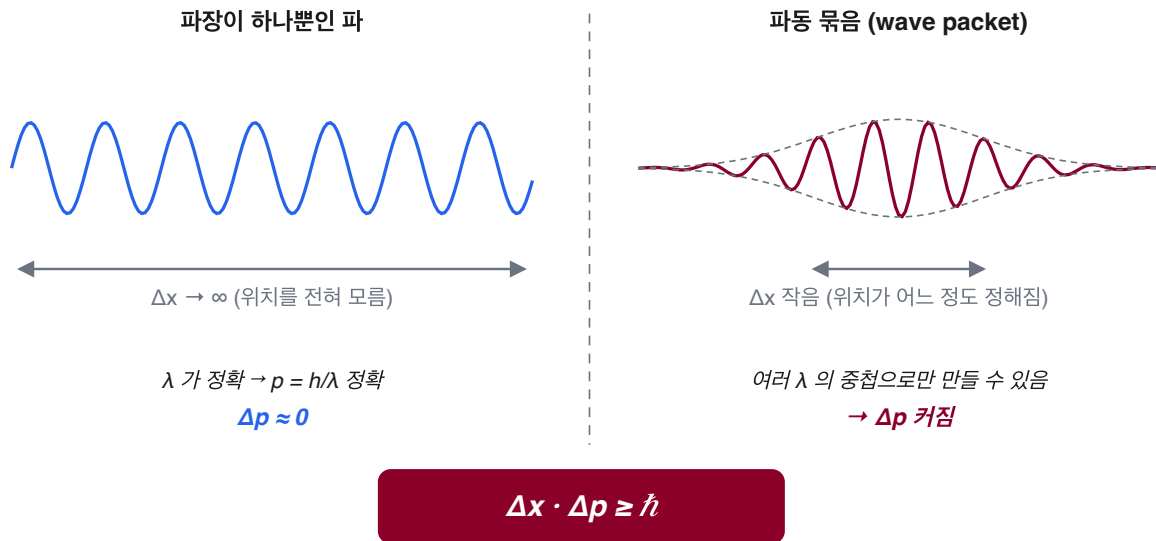
1927년 하이젠베르크(W. Heisenberg)가 제시한 원리. 입자의 위치 $\vec{r}$ 와 운동량 $\vec{p}$ 를 **동시에 무한히 정확하게** 측정하는 것은 불가능하다:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar, \quad \Delta y \cdot \Delta p_y \geq \hbar, \quad \Delta z \cdot \Delta p_z \geq \hbar$$

여기서 $\hbar = h/2\pi = 1.055 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ("h-bar")이다.

- $\Delta x, \Delta p_x$ 는 반복 측정값의 퍼짐(표준편차)
- 아무리 좋은 측정 장비를 써도 곱은 $\hbar$ 밑으로 내려가지 않는다
- 기술의 한계가 아니라 **물질파라는 본질**에서 나오는 한계다

파동 묶음으로 이해하기



- 파장이 하나뿐인 파($\psi = Ae^{ikx}$): $p = h/\lambda$ 가 정확($\Delta p = 0$) $\leftrightarrow |\psi|^2$ 이 균일해 위치는 완전히 미지($\Delta x = \infty$) — 방금 본 자유 입자!
- 위치를 좁히려면 여러 파장을 **중첩** 해 파동 묶음을 만들어야 하고, 그 대가로 Δp 가 커진다

예제: 전자 위치의 불확정성

전자가 x 축을 따라 속력 2.05×10^6 m/s로 움직이는데, 이 속력의 정밀도가 0.50%라 하자. 위치를 동시에 잴 때 최소 불확정성은?

운동량과 그 불확정성:

$$p_x = mv_x = (9.11 \times 10^{-31})(2.05 \times 10^6) = 1.87 \times 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$\Delta p_x = 0.0050 p_x = 9.35 \times 10^{-27} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

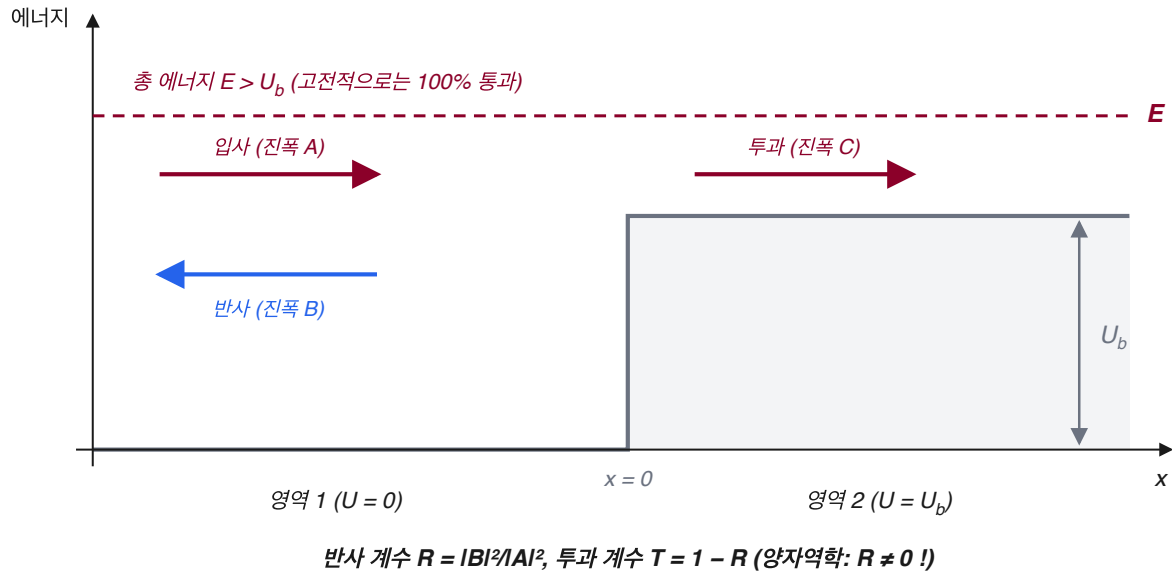
최소 불확정성은 등호일 때이므로:

$$\Delta x = \frac{\hbar}{\Delta p_x} = \frac{1.055 \times 10^{-34}}{9.35 \times 10^{-27}} \approx 1.13 \times 10^{-8} \text{ m} \approx \boxed{11 \text{ nm}}$$

원자 지름의 약 100배. 전자를 "궤도를 도는 작은 공"으로 그릴 수 없는 이유다.

38.8 퍼텐셜 계단에서의 반사

넘을 수 있는 턱에서도 반사된다?



에너지 E 인 전자들을 $x = 0$ 에서 퍼텐셜 에너지가 $0 \rightarrow U_b$ 로 뛰는 **퍼텐셜 계단(potential step)**에 보낸다. $E > U_b$ 이므로 고전적으로는 **전부** 통과해야 한다(속도만 느려질 뿐).

그러나 전자는 물질파다 — 슈뢰딩거 방정식을 풀면 일부는 **반사** 된다.

경계 조건과 반사 계수

각 영역에서 각파수와 일반해는:

$$\psi_1 = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (x < 0), \quad \psi_2 = Ce^{ik_b x} \quad (x > 0)$$

$$k = \frac{2\pi\sqrt{2mE}}{h}, \quad k_b = \frac{2\pi\sqrt{2m(E - U_b)}}{h}$$

(영역 2에서 왼쪽으로 오는 전자는 없으므로 $De^{-ik_b x}$ 항은 버렸다.) $x = 0$ 에서 ψ 와 기울기가 **연속** 이어야 한다는 **경계 조건(boundary conditions)**을 쓰면:

$$A + B = C \quad (\text{값의 일치}), \quad Ak - Bk = Ck_b \quad (\text{기울기의 일치})$$

C 를 소거하면 $\frac{B}{A} = \frac{k - k_b}{k + k_b}$. **반사 계수(reflection coefficient)**는:

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \left(\frac{k - k_b}{k + k_b} \right)^2, \quad T = 1 - R$$

R 는 전자 **한 개**가 반사될 확률이다. $R = 0.010$ 이면 10,000개 중 **평균** 100개가 반사되지만, 어느 전자가 반사될지는 알 수 없다. 파동에게는 당연한 일이다 — 빛이 유리 표면(매질이 바뀌는 곳)에서 일부 반사되듯, 물질파도 k 가 k_b 로 바뀌는 곳에서 일부 반사된다.

38.9 퍼텐셜 장벽 통과: 터널링

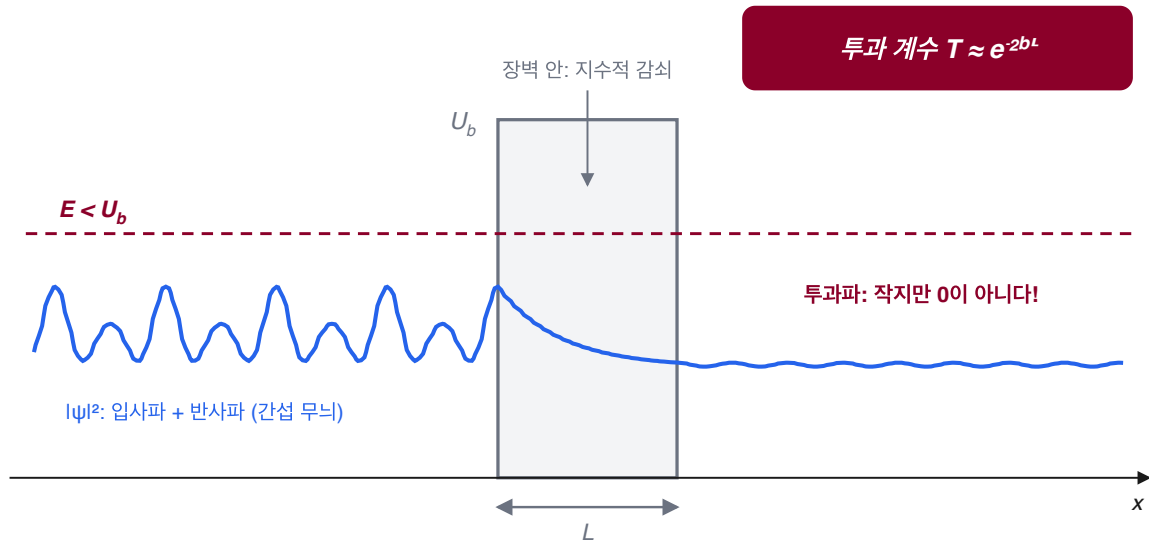
고전적으로 금지된 침입

이번엔 두께 L , 높이 U_b 의 **퍼텐셜 장벽(potential barrier)** 에 에너지 $E < U_b$ 인 전자를 보낸다.

- 장벽 안에서는 $K = E - U_b < 0$ 이어야 하는데, $\frac{1}{2}mv^2$ 은 음수가 될 수 없다
- 따라서 장벽 내부는 **고전적으로 금지된 영역** — 전자는 100% 반사되어야 한다

그러나 전자는 물질파다. 파동함수는 장벽 안에서 0이 되지 않고 **지수적으로 감소하며 스며들고**, 장벽이 얇으면 반대편에 **살아서 도달** 한다. 이 현상이 **터널링(tunneling)** 이다.

장벽 속의 파동함수



- 장벽 앞: 입사파 + 반사파가 간섭하여 정상파 무늬
- 장벽 안: $|\psi|^2$ 이 지수적으로 감소 (진동 없이)
- 장벽 뒤: 작지만 **0이 아닌** 일정 진폭의 투과파 — 전자가 원래 에너지 E 그대로 나타난다

투과 계수

터널링 확률을 주는 **투과 계수(transmission coefficient)** 는 (장벽이 충분히 두꺼울 때):

$$T \approx e^{-2bL}, \quad b = \sqrt{\frac{8\pi^2m(U_b - E)}{h^2}}$$

지수함수이므로 T 는 세 변수에 **극도로 민감** 하다:

- 입자의 질량 m 이 클수록 급감
- 장벽 두께 L 이 두꺼울수록 급감
- 에너지 부족분 $U_b - E$ 가 클수록 급감

예제: 전자의 터널링 확률

에너지 $E = 5.1$ eV인 전자가 높이 $U_b = 6.8$ eV, 두께 $L = 750$ pm인 장벽에 입사한다. 투과 확률은?

먼저 b 를 계산한다. $U_b - E = 1.7$ eV $= 2.72 \times 10^{-19}$ J이므로:

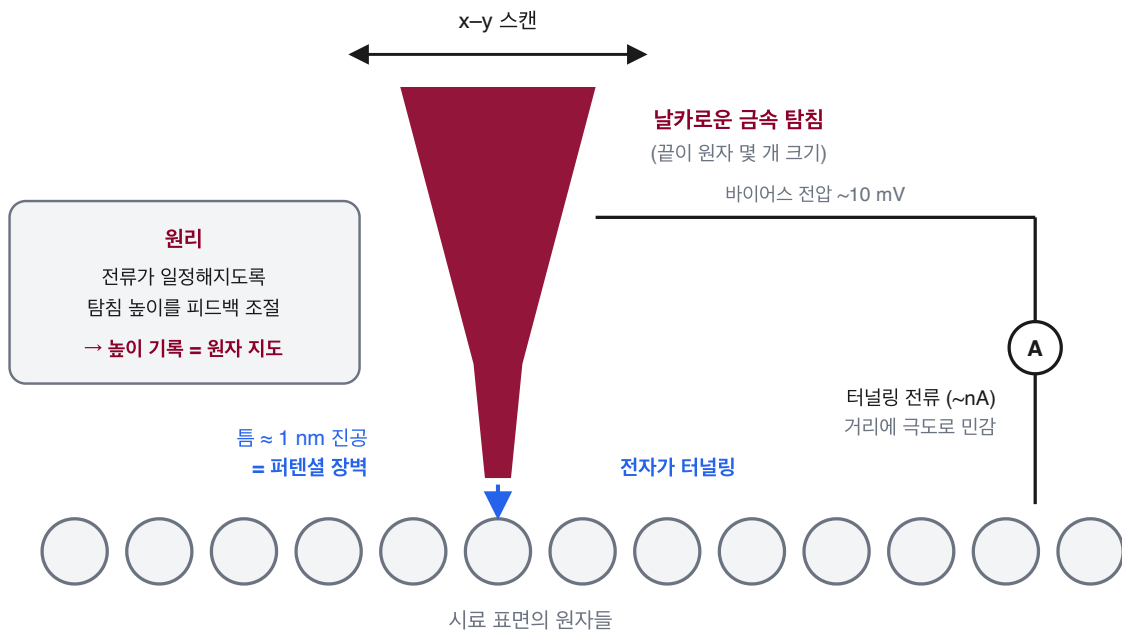
$$b = \sqrt{\frac{8\pi^2(9.11 \times 10^{-31})(2.72 \times 10^{-19})}{(6.63 \times 10^{-34})^2}} = 6.67 \times 10^9 \text{ m}^{-1}$$

$$2bL = 2(6.67 \times 10^9)(750 \times 10^{-12}) = 10.0$$

$$T \approx e^{-10.0} \approx 45 \times 10^{-6}$$

백만 개 중 약 45개가 통과한다. 같은 조건에서 **양성자**를 보내면? 질량이 1836배 커서 $T \approx 10^{-186}$ — 사실상 0이다.

응용: 주사 터널링 현미경 (STM)



- 탐침-표면 사이 진공 틈이 퍼텐셜 장벽 → 전자가 터널링하여 전류가 흐른다
- $T \approx e^{-2bL}$ 이 틈 간격에 지수적으로 민감 → 원자 하나 높이 변화도 전류로 감지
- 터널링 연구로 노벨상: 1973년 에사키·지에버·조지프슨, 1986년 비니히·로러(STM)

터널링은 또한 플래시 메모리의 쓰기/지우기, 태양 중심의 핵융합(양성자가 쿨롱 장벽을 터널링)에서도 핵심 역할을 한다.

Review & Summary

핵심 개념

- **광자** : 빛 에너지의 양자. $E = hf$, 운동량 $p = h/\lambda$
- **광전효과** : 광자 한 개 $\leftrightarrow$ 전자 한 개의 에너지 보존 $hf = K_{\max} + \Phi$. 세기는 광자 수만 바꾼다. $f < f_0 = \Phi/h$ 이면 방출 없음
- **콤프턴 산란** : 광자-전자 충돌. 에너지·운동량 보존에서 $\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\phi)$
- **확률파** : 빛도 물질도, 전파는 파동으로($E_m^2, |\psi|^2$ 이 확률 결정) — 생성·검출은 입자로
- **물질파** : 운동량 p 인 입자의 드브로이 파장 $\lambda = h/p$
- **슈뢰딩거 방정식** 이 ψ 를 결정, **불확정성 원리** 가 측정의 한계를, **터널링** 이 고전적 금지 영역의 통과를 말해 준다

핵심 공식 정리

개념	공식
광자 에너지 / 운동량	$E = hf, \quad p = h/\lambda$
광전 방정식	$hf = K_{\max} + \Phi, \quad K_{\max} = eV_{\text{stop}}$
콤프턴 이동	$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\phi), \quad \frac{h}{m_e c} = 2.43 \text{ pm}$
드브로이 파장	$\lambda = h/p$
슈뢰딩거 방정식(1D)	$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2}[E - U]\psi = 0$
불확정성 / 터널링	$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar, \quad T \approx e^{-2bL}$

기억할 것:

- $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, $\hbar = h/2\pi$, $hc = 1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}$
- 빛도 전자도: 파동으로 이동하고, 입자로 검출되며, 확률로 예측된다