

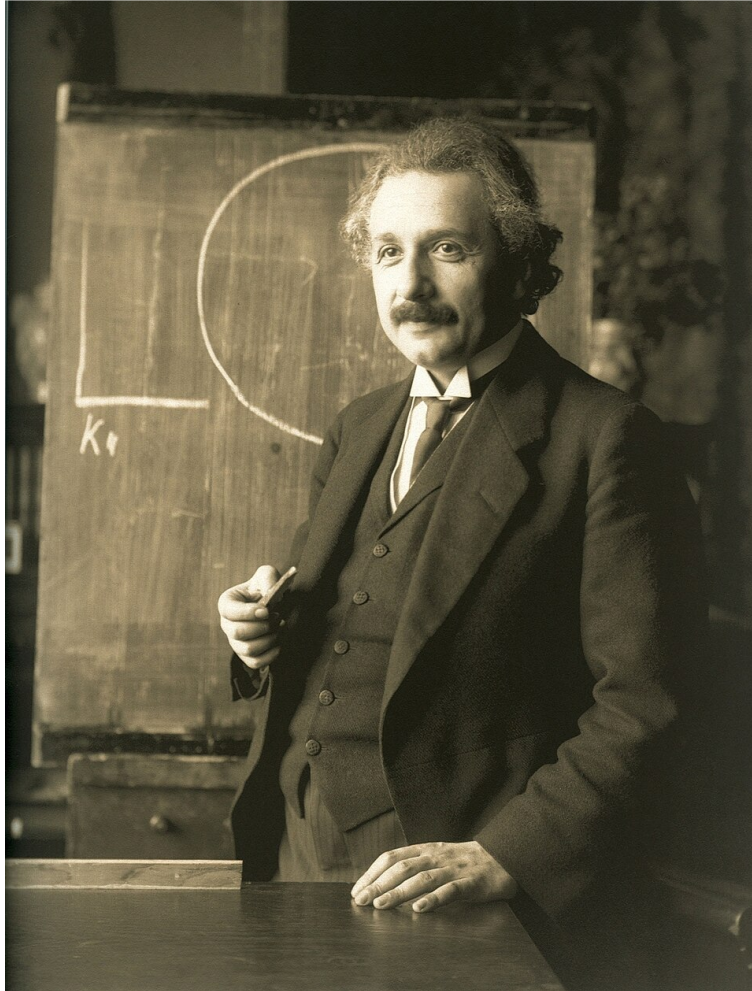
37장: 상대성이론

Relativity

상식이 깨지는 물리

1905년, 26세의 **아인슈타인(Albert Einstein)** 은 **특수 상대성이론(special theory of relativity)** 을 발표했다.

- 시간은 우주 어디서나 똑같이 흐르는 절대적인 것이 아니다
- 움직이는 시계는 느리게 가고, 움직이는 물체는 짧아진다
- 두 사건이 동시인지 아닌지조차 관측자마다 다르다



처음 들으면 믿기 어렵지만, 지금까지 **단 하나의 반례도 발견되지 않은** 정밀하게 검증된 이론이다.

이번 장에서 배울 내용

1. **두 가지 가설** — 이론 전체가 단 두 문장에서 출발한다
2. **동시성·시간 지연·길이 수축** — 시간과 공간이 뒤섞인다
3. **로런츠 변환** — 두 관측자의 좌표를 잇는 정확한 관계식
4. **속도 변환과 도플러 효과** — 빛의 속력은 넘을 수 없다
5. **상대론적 운동량과 에너지** — 그 유명한 $E = mc^2$

핵심 주의사항: **누가, 무엇을, 어떻게** 측정했는지를 끝까지 따져야 한다. 수학은 어렵지 않지만 사고 방식이 낯설다.

상대성이론은 공학이다

상대성이론은 철학이 아니라 매일 쓰이는 실용 기술이다.



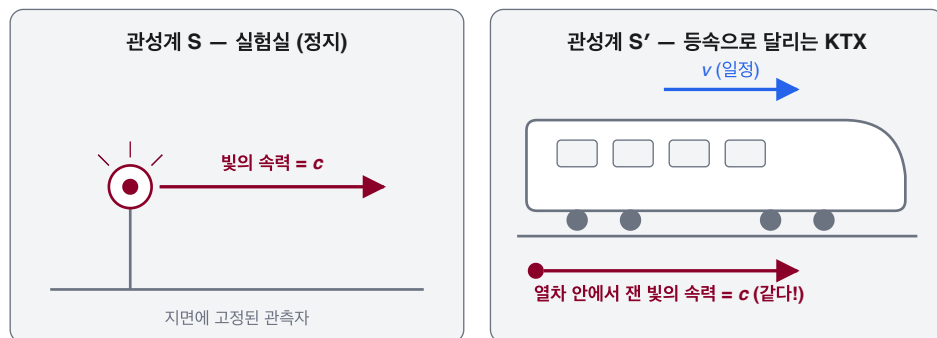
- **GPS 위성**의 시계는 지상과 다른 속도로 간다 — 상대론 보정 없이는 하루 만에 위치 오차가 수 km로 커진다
- 병원의 **입자 치료기**, 가속기 설계는 모두 상대론 계산을 쓴다
- 반도체 속 전자, 금의 노란색도 상대론 효과와 관련이 있다

37.1 동시성과 시간 지연

두 가지 가설

아인슈타인의 특수 상대성이론은 두 가설에서 출발한다.

1. **상대성 가설(relativity postulate)** : 물리 법칙은 모든 **관성계(inertial reference frame)** 에서 같다. 특별히 우월한 좌표계는 없다.
2. **광속 가설(speed of light postulate)** : 진공 중 빛의 속력은 모든 방향, 모든 관성계에서 같은 값 c 이다.



가설 1: 물리 법칙은 모든 관성계에서 같다

가설 2: 진공 중 빛의 속력은 모든 관성계에서 같은 값 c

가설이 말하는 것과 말하지 않는 것

갈릴레이는 **역학** 법칙이 모든 관성계에서 같다고 했다. 아인슈타인은 이를 전자기학과 광학을 포함한 **모든** 물리 법칙으로 확장했다.

- 가설 1은 "모든 관측자의 **측정값** 이 같다"는 뜻이 아니다 — 측정값은 대부분 다르다!
- 같은 것은 측정값들을 연결하는 **법칙** 이다

가설 2가 진짜 충격이다. 시속 100 km 기차에서 앞으로 던진 공은 지상에서 더 빨라 보인다. 그러나 기차의 전조등에서 나온 **빛** 은 기차 안에서 재도, 지상에서 재도 정확히 같은 c 다.

궁극의 속력

빛의 속력은 자연이 정한 **궁극의 속력(ultimate speed)** 이다.

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$$

- 1964년 베르토치(W. Bertozzi)는 전자를 가속하며 속력과 운동 에너지를 독립적으로 측정했다
 - 에너지를 아무리 쏟아부어도 전자의 속력은 c 에 다가갈 뿐 **결코 도달하지 못했다**
 - 지금까지 실험실에서 도달한 최고 기록도 $0.999\,999\,999\,95\,c$ — 여전히 c 미만
- 에너지나 정보를 나르는 어떤 것도 c 를 넘을 수 없다.

광속 가설의 직접 검증

"광원이 움직여도 빛의 속력은 같은가?"는 실험으로 직접 확인되었다.

- 1964년 CERN에서 **중성 파이온(π^0)** 빔을 $0.999\,75\,c$ 로 가속했다
- 파이온은 감마선(빛)으로 붕괴한다: $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$
- 광원 자체가 거의 광속으로 움직이는 극한 상황!

측정 결과: 이 감마선의 속력은 정지한 광원에서 나온 빛과 **정확히 같은 c** 였다. 빛의 속력은 광원의 운동과 무관하다.

사건과 시공간 좌표

사건(event) 은 "일어난 일"이다 — 전구가 켜짐, 두 입자의 충돌, 번개가 침.

- 모든 사건은 공간 좌표 3개 + 시간 좌표 1개, 즉 **시공간 좌표(spacetime coordinates)** (x, y, z, t) 로 기록한다
- 사건은 특정 좌표계의 소유물이 아니다 — 어느 관측자든 자기 좌표계로 같은 사건을 기록할 수 있다
- 관측자마다 좌표값은 **다를 수 있다**

빛의 이동 시간에 속지 않으려면, 관측자의 좌표계 곳곳에 **동기화된 시계** 와 자를 깔아 두고, 사건 바로 옆의 시계·자로 좌표를 읽는다고 상상하면 된다.

동시성의 상대성

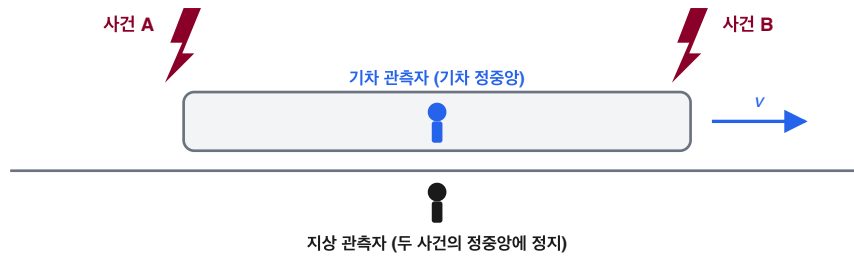
서로 상대 운동하는 두 관측자는, 일반적으로 두 사건이 동시인지에 대해 **서로 다른 결론**을 내린다. 그리고 **둘 다 옳다**.

동시성은 절대적 개념이 아니라 관측자의 운동 상태에 따라 달라지는 **상대적** 개념이다.

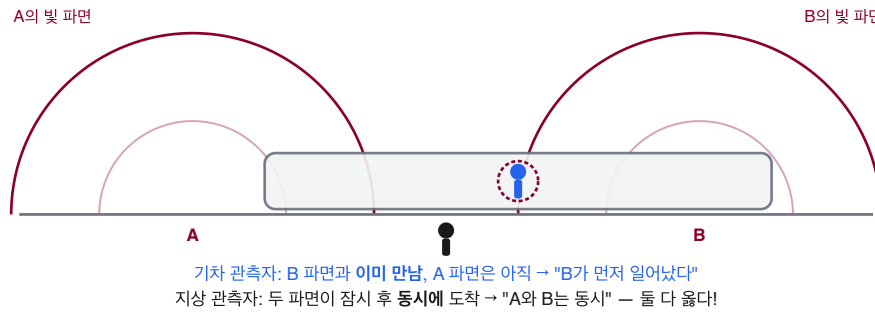
- 일상에서 이를 못 느끼는 이유: 우리의 속력이 c 에 비해 너무 느려서 동시성의 어긋남이 측정 불가능할 만큼 작기 때문
- 다음 사고실험이 이유를 보여준다

사고실험: 달리는 기차와 두 번개

(a) 지상 좌표계, $t = 0$: 두 번개가 기차 양 끝을 때린다



(b) 잠시 후 : 기차 관측자가 B의 파면과 먼저 만난다



두 관측자 모두 옳다

지상 관측자의 논리: "나는 A와 B의 정중앙에 서 있었고, 두 빛이 **동시에** 도착했다. 따라서 두 번개는 동시에 쳤다."

기차 관측자의 논리: "나도 두 자국의 정중앙에 있었다. 그런데 B의 빛이 **먼저** 도착했다. 따라서 B가 먼저 쳤다."

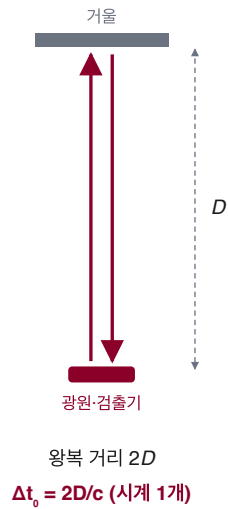
- 각 사건에서 퍼진 빛의 파면은 **두 좌표계 모두에서 속력 c** — 광속 가설
- 기차 관측자는 B의 파면을 마중 나가고 A의 파면에서 멀어진다
- 어느 쪽도 틀리지 않았다. 우월한 좌표계는 없다 (가설 1)

광시계 사고실험

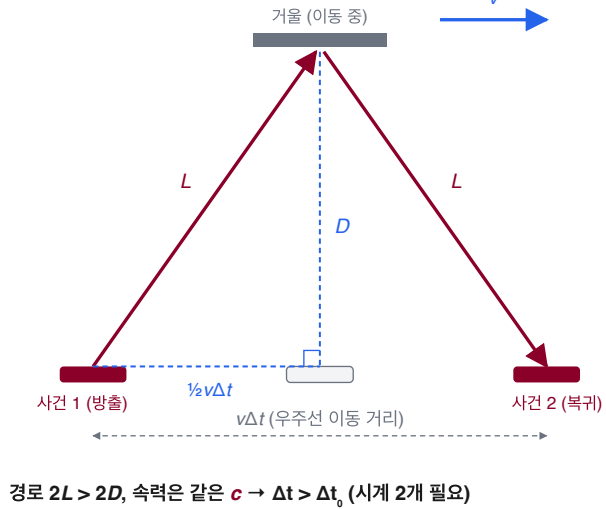
시간 지연을 정량적으로 유도하자. 우주선에 **광시계(light clock)**를 심는다: 광원에서 빛이 수직으로 올라가 거리 D 위의 거울에 반사되어 돌아온다.

- **사건 1**: 빛 방출, **사건 2**: 빛 복귀
- 우주선은 지상에 대해 일정한 속도 v 로 날아간다

우주선 안 (고유 좌표계)



지상에서 본 모습



시간 지연 유도 (1) – 우주선 안

우주선 안의 관측자에게 두 사건은 **같은 장소** (광원 위치)에서 일어난다. 시계 하나면 충분하다.

빛의 왕복 거리는 $2D$, 속력은 c 이므로:

$$\Delta t_0 = \frac{2D}{c}$$

이것이 우주선 관측자가 재는 두 사건 사이의 시간 간격이다.

시간 지연 유도 (2) – 지상에서

지상 관측자에게는 빛이 이동하는 동안 우주선도 옆으로 움직인다. 빛은 **지그재그 경로**를 그린다.

지상에서 잰 시간 간격을 Δt 라 하면, 그동안 우주선은 $v \Delta t$ 만큼 이동한다. 빛이 올라가는 반쪽 경로의 길이는 피타고라스 정리로:

$$L = \sqrt{\left(\frac{1}{2}v \Delta t\right)^2 + D^2}$$

광속 가설에 의해 지상에서도 빛의 속력은 같은 c 이므로:

$$\Delta t = \frac{2L}{c}$$

두 사건이 **다른 장소**에서 일어나므로 지상에서는 동기화된 시계 **두 개**가 필요하다.

시간 지연 유도 (3) — 피타고라스 전개

$\Delta t_0 = 2D/c$ 에서 $D = \frac{1}{2}c \Delta t_0$ 를 대입하면:

$$c \Delta t = 2L = 2\sqrt{\left(\frac{1}{2}v \Delta t\right)^2 + \left(\frac{1}{2}c \Delta t_0\right)^2}$$

양변을 제곱하면:

$$c^2 \Delta t^2 = v^2 \Delta t^2 + c^2 \Delta t_0^2 \Rightarrow \Delta t^2 (c^2 - v^2) = c^2 \Delta t_0^2$$

Δt 에 대해 풀면:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \geq \Delta t_0$$

$v < c$ 이므로 분모는 1보다 작다. 지상 관측자가 재는 시간이 **항상 더 길다** — 이것이 **시간 지연 (time dilation)** 이다.

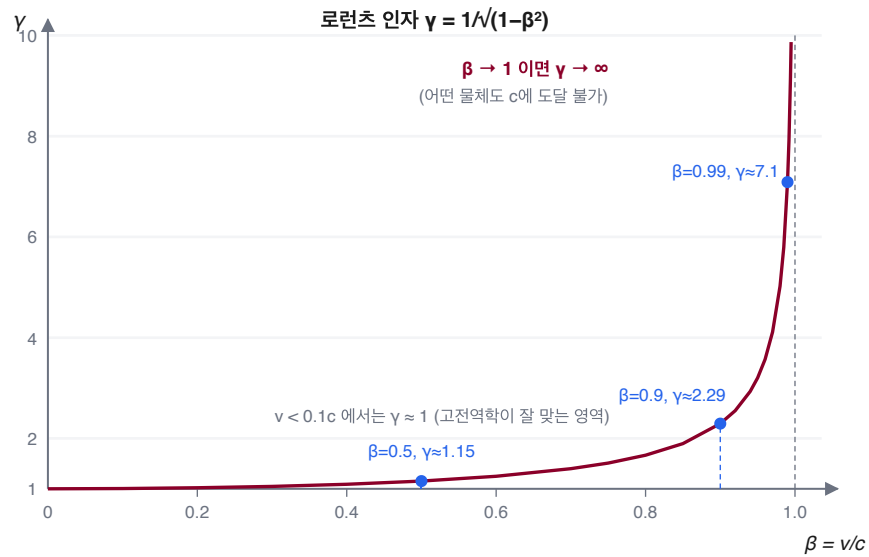
로런츠 인자 γ

식을 간결하게 쓰기 위해 두 기호를 도입한다.

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

β 는 속도 매개변수(speed parameter), γ 는 로런츠 인자(Lorentz factor) 이다. 시간 지연은:

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0$$



고유 시간

고유 시간(proper time) Δt_0 : 두 사건이 **같은 장소** 에서 일어나는 관성계에서, 그 자리의 시계 **하나** 로 잰 시간 간격.

- 다른 어떤 관성계에서 재도 시간 간격은 고유 시간보다 **길다** ($\Delta t = \gamma \Delta t_0$)
- "움직이는 시계는 느리게 간다"는 말의 정확한 의미가 이것이다

주의할 점:

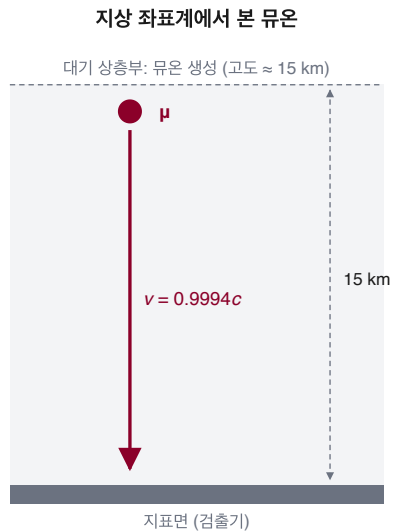
- 누구의 시간이 고유 시간인지 항상 먼저 판단하라 — "두 사건이 같은 장소에서 일어나는 좌표계는 누구인가?"
- $v < 0.1c$ 이면 $\gamma \approx 1$ — 고전역학이 잘 맞는 이유

시뮬레이션: 광시계 시간 지연 — 우주선 속도에 따른 두 시계 비교와 길이 수축

실험 검증 1: 뮤온의 수명

뮤온(muon) 은 우주선(cosmic ray)이 대기와 충돌할 때 상공 약 15 km에서 만들어지는 불안정한 입자다.

- 정지한 뮤온의 평균 수명: $\Delta t_0 = 2.2 \mu s$ (뮤온 자신의 고유 시간)
- 고전적 예상 이동 거리: $0.9994c \times 2.2 \mu s \approx 660 \text{ m} \rightarrow$ 지표에 도달 불가!
- 그런데 실제로는 뮤온이 지표에서 **대량으로 검출** 된다



수명이 $\gamma \Delta t_0 = 63.5 \mu s$ 로 늘어나 약 19 km 비행
(시간 지연이 없다면 0.66 km밖에 못 간다)



수명은 고유 시간 $\Delta t_0 = 2.2 \mu s$ 그대로지만
거리가 **0.52 km로 줄어** 지표에 도달 — 결론 일치!

예제 1: 뮤온의 늘어난 수명

$v = 0.9994c$ 로 움직이는 뮤온의 수명을 실험실 시계로 재면 얼마인가? (정지 수명 $\Delta t_0 = 2.200 \mu s$)

로런츠 인자부터 계산한다. $\beta = 0.9994$ 이므로:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0.9994)^2}} = \frac{1}{\sqrt{0.0012}} = 28.87$$

시간 지연 공식에 대입하면:

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 = (28.87)(2.200 \mu s) = \boxed{63.51 \mu s}$$

실험 측정값이 이 예측과 오차 범위 안에서 일치했다. 늘어난 수명 동안 뮤온은 약 19 km를 날아 지표에 도달한다.

실험 검증 2: 거시적 시계

미시 입자만이 아니라 **실제 시계** 로도 확인되었다.

- **1971년 하펠레-키팅(Hafele-Keating) 실험** : 세슘 원자시계 4대를 여객기에 싣고 지구를 두 바퀴 돌았다 (동쪽/서쪽 각 1회)
- 지상에 남은 시계와 비교 → 상대론 예측과 10% 이내 일치
- 몇 년 뒤 미국 메릴랜드대 팀은 15시간 비행으로 **1% 이내** 로 검증

오늘날 원자시계를 항공기로 운반해 시각을 맞출 때는 시간 지연 보정이 **표준 절차** 다.

GPS: 상대성이론을 매일 쓰는 기술

GPS 위성은 고도 약 20,200 km에서 약 3.9 km/s로 돈다. 위성의 원자시계는:

- **특수 상대론(운동)** : 지상보다 하루에 약 $7\ \mu\text{s}$ **느려진다**
- **일반 상대론(중력 약함)** : 하루에 약 $45\ \mu\text{s}$ **빨라진다**
- 알짜 효과: 하루 약 $+38\ \mu\text{s}$

빛은 $1\ \mu\text{s}$ 에 300 m를 간다. 보정하지 않으면 위치 오차가 **하루에 약 10 km씩** 누적되어 GPS는 하루 만에 무용지물이 된다. 여러분의 스마트폰은 매 순간 상대성이론을 계산하고 있다.

일상 속의 시간 지연: KTX 사고실험

KTX를 타면 정말 시간이 느리게 갈까? 시속 300 km ($v \approx 83.3$ m/s)로 계산해 보자.

$$\beta = \frac{83.3}{3.0 \times 10^8} \approx 2.8 \times 10^{-7} \quad \gamma - 1 \approx \frac{1}{2}\beta^2 \approx 3.9 \times 10^{-14}$$

서울에서 부산까지 약 2.5시간(9000 s) 동안 승객의 시계가 늦어지는 양:

$$\Delta t - \Delta t_0 \approx (9000 \text{ s})(3.9 \times 10^{-14}) \approx 3.5 \times 10^{-10} \text{ s}$$

약 **0.35 ns** — 도착하면 플랫폼의 사람들보다 그만큼 젊다! 측정 불가능할 만큼 작아서 일상에서 상대론을 못 느끼는 것이다.

예제 2: 우주 여행자의 시간

우주선이 $0.9990c$ 로 지구를 떠나 전초기지까지 갔다가 같은 속력으로 돌아온다. 왕복에 **선내 시계로 20.0년**이 걸렸다면, 지구에서는 몇 년이 흘렀을까?

편도 여행의 두 사건(출발, 도착)은 우주선 안에서는 같은 장소(우주선 자신)에서 일어난다 → 선내 시간 10.0년이 **고유 시간**이다.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (0.9990)^2}} = \frac{1}{\sqrt{0.001999}} = 22.37$$

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 = (22.37)(10.0 \text{ y}) = 224 \text{ y} \Rightarrow \Delta t_{\text{왕복}} = \boxed{448 \text{ y}}$$

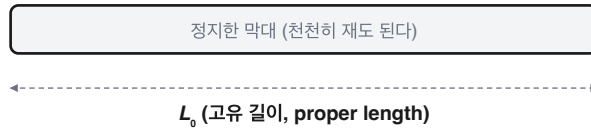
여행자는 20년 늙는 동안 지구는 448년이 흐른다. 고속 운동은 **미래로 가는 편도 시간여행**인 셈이다.

37.2 길이의 상대성

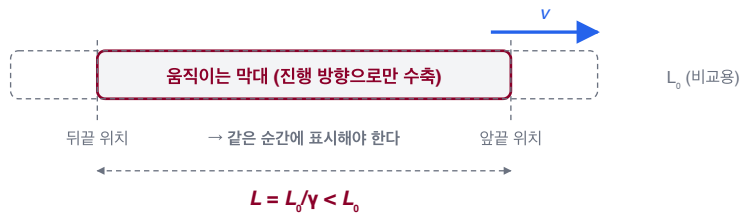
길이 측정에는 동시성이 숨어 있다

정지한 막대의 길이는 양 끝 위치를 천천히 재도 된다. 그러나 움직이는 막대는 양 끝의 위치를 **같은 순간에** 표시해야 길이라 할 수 있다.

(a) 막대의 정지 좌표계 — 고유 길이 L_0



(b) 막대가 속도 v 로 지나갈 때 — 수축된 길이 L



"같은 순간"이 관측자마다 다르므로(동시성의 상대성), **길이도 상대적인 양** 이 될 수밖에 없다.

길이 수축

고유 길이(proper length) L_0 : 물체가 **정지해 있는 좌표계** 에서 잰 길이.

물체가 길이 방향과 나란히 속력 v 로 움직일 때, 관측자가 재는 길이는:

$$L = L_0 \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{L_0}{\gamma} \leq L_0$$

이를 **길이 수축(length contraction)** 이라 한다.

- 수축은 **운동 방향으로만** 일어난다 — 수직 방향 크기는 그대로
- 막대뿐 아니라 두 지점 사이의 **거리** 도 수축한다 (예: 지구-별 사이 거리)

길이 수축의 유도

길이 수축은 시간 지연의 직접적인 결과다. 승강장(고유 길이 L_0)을 기차가 속력 v 로 통과한다.

지상 관측자 : 기차(의 한 점)가 승강장을 통과하는 데 걸린 시간 Δt 를 재면:

$$L_0 = v \Delta t$$

두 사건(승강장 앞끝 통과, 뒷끝 통과)이 다른 장소에서 일어나므로 Δt 는 고유 시간이 아니다.

기차 관측자 : 두 사건이 모두 자기 위치에서 일어난다 $\rightarrow$ 고유 시간 Δt_0 로 잰다. 그에게는 승강장이 길이 L 로 지나가므로:

$$L = v \Delta t_0$$

두 식을 나누고 $\Delta t = \gamma \Delta t_0$ 를 쓰면:

$$\frac{L}{L_0} = \frac{v \Delta t_0}{v \Delta t} = \frac{1}{\gamma} \Rightarrow \boxed{L = \frac{L_0}{\gamma}}$$

뮤온 문제, 두 관점의 완벽한 일치

같은 현상을 두 좌표계가 **다른 이유**로 설명한다.

- **지상 좌표계** : 뮤온의 수명이 γ 배로 늘어나($63.5 \mu s$) 15 km를 통과한다 — **시간 지연**
- **뮤온 좌표계** : 수명은 $2.2 \mu s$ 그대로지만, 대기층 두께가 $15 \text{ km} / \gamma \approx 0.52 \text{ km}$ 로 줄어 통과한다 — **길이 수축**

"뮤온이 지표에 도달한다"는 **사실**은 두 좌표계에서 같다. 물리 법칙은 같고, 측정값이 다를 뿐이다.

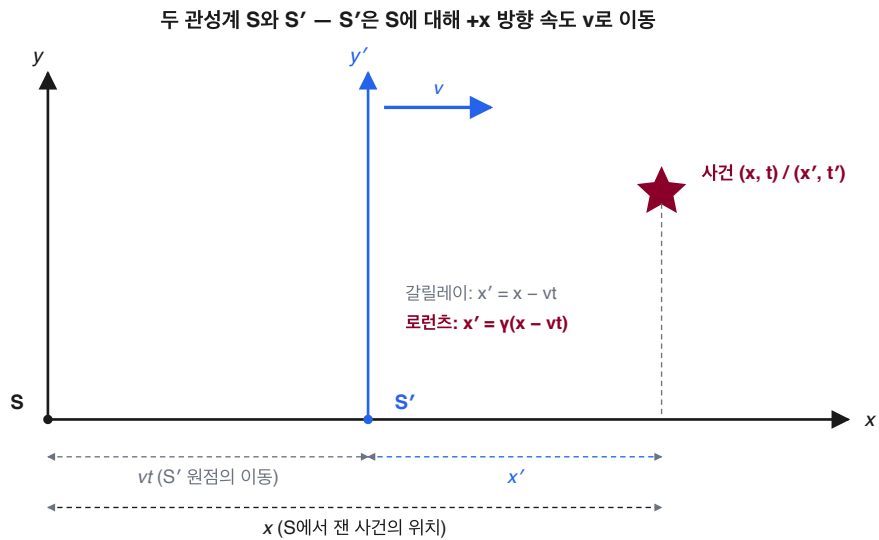
정말로 짧아지는가? 측정이 곧 실재다 — 모든 관측이 일관되게 수축을 보여주므로, 그 좌표계에서 물체는 **실제로** 짧다.

37.3 로런츠 변환

갈릴레이 변환

좌표계 S' 이 S 에 대해 $+x$ 방향으로 속력 v 로 움직인다 ($t = t' = 0$ 에 원점 일치). 아인슈타인 이전에는 두 좌표계의 사건 좌표가 이렇게 연결된다고 믿었다.

$$x' = x - vt \quad t' = t$$



$t' = t$ 는 "시간은 모두에게 똑같이 흐른다"는 **가정**이다 — 너무 당연해 보여서 아무도 의심하지 않았다.

로런츠 변환식

모든 속력에서 옳은 변환은 **로런츠 변환(Lorentz transformation)** 이다.

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt) \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)\end{aligned}$$

- 운동 방향과 수직인 y, z 는 변하지 않는다
- 첫 식과 마지막 식에서 **공간 x 와 시간 t 가 서로 얽혀 있다** — 시공간 얽힘이 수식으로 드러난다
- t' 이 x 에 의존한다: 위치가 다르면 시간도 다르게 변환된다 (동시성의 상대성!)

갈릴레이 극한

상대론적 식은 $c \rightarrow \infty$ 극한에서 반드시 고전 식으로 돌아가야 한다.

$c \rightarrow \infty$ 이면:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \rightarrow 1 \quad \frac{vx}{c^2} \rightarrow 0$$

따라서 로런츠 변환은:

$$x' = \gamma(x - vt) \rightarrow x - vt \quad t' = \gamma(t - vx/c^2) \rightarrow t$$

정확히 갈릴레이 변환이다. 저속($v \lesssim 0.1c$)에서 고전역학이 훌륭히 작동한 이유가 여기에 있다.

역변환과 사건 쌍 형태

역변환은 프라임을 맞바꾸고 $v \rightarrow -v$ 로 바꾸면 된다 (S 는 S' 에 대해 $-x'$ 방향으로 움직이므로):

$$x = \gamma(x' + vt')$$
$$t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)$$

두 사건의 **차이** $\Delta x = x_2 - x_1, \Delta t = t_2 - t_1$ 에 대해서도 같은 형태가 성립한다.

방향	공간	시간
$S' \rightarrow S$	$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v \Delta t')$	$\Delta t = \gamma(\Delta t' + v \Delta x'/c^2)$
$S \rightarrow S'$	$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v \Delta t)$	$\Delta t' = \gamma(\Delta t - v \Delta x/c^2)$

부호 실수가 가장 흔한 오답 원인이다. 두 사건의 값을 섞지 말고, Δ 량이 음수면 음수 그대로 대입하라.

로런츠 변환의 결과 1: 동시성의 상대성

S' 에서 두 사건이 **동시**지만($\Delta t' = 0$) **다른 장소**에서 일어났다면($\Delta x' \neq 0$), S 에서는:

$$\Delta t = \gamma \left(\Delta t' + \frac{v \Delta x'}{c^2} \right) = \gamma \frac{v \Delta x'}{c^2} \neq 0$$

- 공간적으로 떨어진 두 사건이 한 좌표계에서 동시라면, 상대 운동하는 다른 좌표계에서는 **동시가 아니다**
- 37.1절에서 사고실험으로 얻은 결론이 로런츠 변환에서 자동으로 나온다

로런츠 변환의 결과 2: 시간 지연

S' 에서 두 사건이 **같은 장소**에서 일어났다면($\Delta x' = 0$):

$$\Delta t = \gamma \left(\Delta t' + \frac{v \cdot 0}{c^2} \right) = \gamma \Delta t'$$

$\Delta x' = 0$ 이므로 $\Delta t'$ 은 시계 하나로 잴 **고유 시간** Δt_0 이고:

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0$$

광시계로 유도한 시간 지연 공식이 그대로 재현된다 — 시간 지연은 로런츠 변환의 특수한 경우다.

로런츠 변환의 결과 3: 길이 수축

막대가 S' 에 정지해 있고 x' 축과 나란하다. S' 관측자는 천천히 재도 되므로 $\Delta x' = L_0$ (고유 길이).

S 에서는 막대가 움직이므로 양 끝을 **동시에** ($\Delta t = 0$) 재야 하고, 그 결과가 길이 $L = \Delta x$ 다.

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v \Delta t) \Rightarrow L_0 = \gamma(L - 0)$$

따라서:

$$L = \frac{L_0}{\gamma}$$

길이 수축도 로런츠 변환의 특수한 경우다. 시간 지연·길이 수축·동시성이 모두 한 세트의 식에서 나온다.

예제 3: 사건 순서의 역전

우주선(좌표계 S)이 행성과 그 위성을 지나며 두 사건을 관측했다: 위성 기지의 마이크로파 방출(사건 1) 후 $\Delta t = 1.10$ s 뒤에 행성 전초기지의 폭발(사건 2). 우주선이 켜 두 사건 사이 거리는 $\Delta x = +4.00 \times 10^8$ m. 행성-위성 좌표계 S' 은 $v = +0.980c$ 로 움직인다. S' 에서 본 $\Delta x'$ 과 $\Delta t'$ 은?

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (0.980)^2}} = \frac{1}{\sqrt{0.0396}} = 5.0252$$

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v \Delta t) = 5.0252 [4.00 \times 10^8 - (0.980)(2.998 \times 10^8)(1.10)] = \boxed{3.86 \times 10^8 \text{ m}}$$

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{v \Delta x}{c^2} \right) = 5.0252 \left[1.10 - \frac{(0.980)(4.00 \times 10^8)}{2.998 \times 10^8} \right] = \boxed{-1.04 \text{ s}}$$

$\Delta t' < 0$: 행성-위성 좌표계에서는 **폭발이 방출보다 1.04 s 먼저** 일어났다!

예제 3 계속: 인과율은 지켜지는가

사건의 순서가 좌표계에 따라 뒤집혔다. 그렇다면 "방출이 폭발을 일으켰다"는 인과관계도 뒤집힐 수 있을까?

인과관계가 있으려면 정보가 사건 1에서 사건 2로 **이동** 해야 한다. 필요한 속력:

$$v_{\text{정보}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{4.00 \times 10^8 \text{ m}}{1.10 \text{ s}} = 3.64 \times 10^8 \text{ m/s} > c$$

- 어떤 신호도 c 보다 빠를 수 없으므로 두 사건은 **인과적으로 무관** 하다
- 순서가 뒤집힐 수 있는 것은 이런 무관한 사건 쌍뿐이다
- 인과관계가 가능한 사건 쌍($v_{\text{정보}} \leq c$)의 순서는 **모든 관성계에서 같다** — 상대론은 인과율을 지킨다

37.4 속도의 상대성

상대론적 속도 변환의 유도

입자가 S' 에서 속도 u' 으로 $+x'$ 방향으로 움직인다. S 에서 본 속도 u 는?

입자가 지나가는 두 사건에 로런츠 변환(사건 쌍 형태)을 적용한다:

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v \Delta t') \quad \Delta t = \gamma \left(\Delta t' + \frac{v \Delta x'}{c^2} \right)$$

첫 식을 둘째 식으로 나누면 γ 가 약분된다:

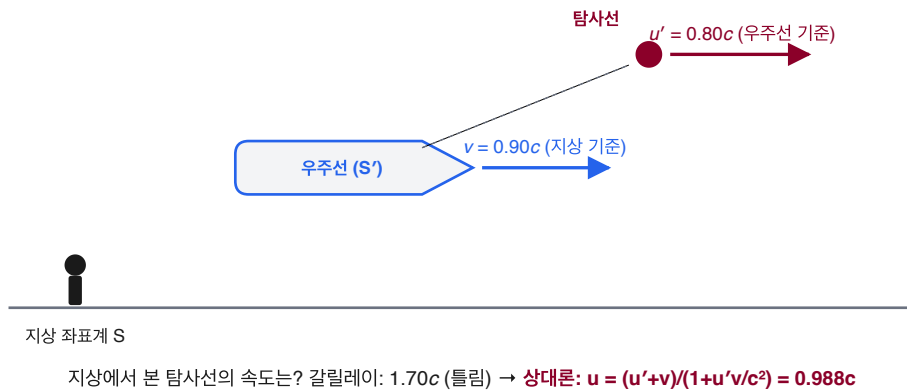
$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x' + v \Delta t'}{\Delta t' + v \Delta x'/c^2} = \frac{\Delta x'/\Delta t' + v}{1 + v (\Delta x'/\Delta t')/c^2}$$

$\Delta x/\Delta t = u$, $\Delta x'/\Delta t' = u'$ 이므로:

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2}$$

속도는 단순히 더해지지 않는다

상대론적 속도 변환 — 속도는 단순히 더해지지 않는다



$u' = 0.80c, v = 0.90c$ 를 대입해 보자:

$$u = \frac{0.80c + 0.90c}{1 + (0.80)(0.90)} = \frac{1.70c}{1.72} = 0.988c < c$$

- $c \rightarrow \infty$ 극한: 분모 $\rightarrow 1$, 갈릴레이 덧셈 $u = u' + v$ 로 복귀
- $u' = c$ 이면: $u = \frac{c + v}{1 + v/c} = c \frac{c + v}{c + v} = c$ — 어느 좌표계에서 봐도 빛은 c (광속 가설과 자동으로 일치!)

37.5 빛의 도플러 효과

소리의 도플러와 무엇이 다른가

17장에서 배운 소리의 도플러 효과는 **매질(공기)**에 대한 광원·관측자 각각의 속도에 의존했다.

빛은 매질이 필요 없다. 빛의 도플러 효과는 오직 광원과 관측자의 **상대 속도** v 에만 의존한다.

고유 진동수(proper frequency) f_0 : 광원의 정지 좌표계에서 잰 진동수. 광원과 관측자가 서로 **멀어질 때** 관측 진동수는:

$$f = f_0 \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} < f_0 \quad (\beta = v/c)$$

가까워질 때는 β 의 부호를 반대로 하면 된다 ($f > f_0$).

파장 공식의 유도

멀어지는 광원이 주기 $T_0 = 1/f_0$ (고유 주기)마다 파동 마루를 내보낸다. 관측자 좌표계에서:

1. **시간 지연**: 움직이는 광원의 주기는 γT_0 로 늘어난다

2. **후퇴**: 한 주기 동안 광원이 $v\gamma T_0$ 만큼 더 멀어져, 마루 사이 간격이 그만큼 늘어난다

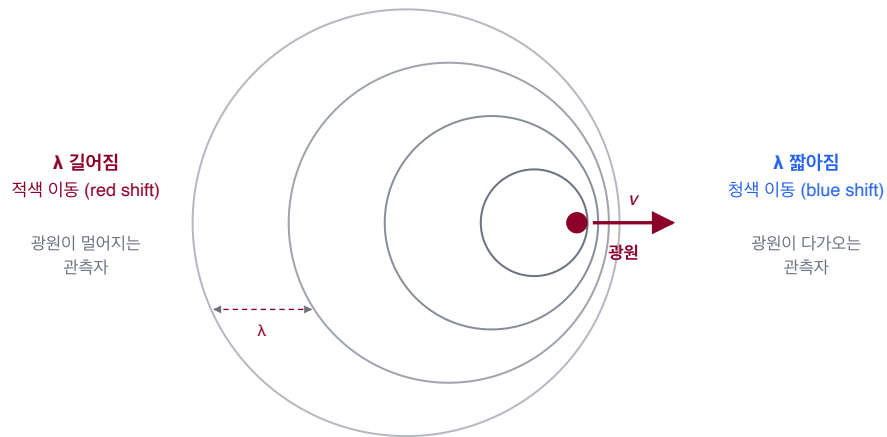
$$\lambda = c\gamma T_0 + v\gamma T_0 = cT_0 \frac{1 + \beta}{\sqrt{(1 - \beta)(1 + \beta)}}$$

$cT_0 = \lambda_0$ (고유 파장)이므로:

$$\boxed{\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}} \quad (\text{멀어질 때})$$

적색 이동과 청색 이동

움직이는 광원의 도플러 효과



멀어질 때: $\lambda = \lambda_0 \sqrt{(1+\beta)/(1-\beta)} > \lambda_0$ 가까워질 때는 β 의 부호를 반대로

- 멀어짐 $\rightarrow \lambda > \lambda_0$: **적색 이동(red shift)** — 파장이 스펙트럼의 빨간 쪽으로
- 가까워짐 $\rightarrow \lambda < \lambda_0$: **청색 이동(blue shift)**

"적색"은 기억용 이름일 뿐, 실제로 빨강계 보인다는 뜻은 아니다.

천문학의 도플러: 후퇴 속도 측정

저속($\beta \ll 1$)에서 파장 공식을 전개하면 $\lambda \approx \lambda_0(1 + \beta)$, 즉:

$$v = \frac{|\Delta\lambda|}{\lambda_0} c \quad (v \ll c, \Delta\lambda = \lambda - \lambda_0)$$

실전 예: 은하 NGC 7319의 산소 방출선은 실험실에서 $\lambda_0 = 513 \text{ nm}$ 인데, 관측된 파장은 525 nm였다 ($\Delta\lambda = +12 \text{ nm}$).

$$v = \frac{12}{513} (3.00 \times 10^8) \approx 7.0 \times 10^6 \text{ m/s}$$

적색 이동이므로 이 은하는 우리에게서 **멀어지고 있다**. 허블은 이런 관측으로 우주 팽창을 발견했다. 경찰의 속도측정기도 같은 원리(마이크로파 도플러)다.

횡 도플러 효과

광원이 관측자를 스쳐 지나가는 순간 — 시선 방향 속도가 0인 순간 — 에도 빛에는 도플러 효과가 남는다.

$$f = f_0 \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{f_0}{\gamma}$$

이를 **횡 도플러 효과(transverse Doppler effect)** 라 한다. 주기로 쓰면 $T = \gamma T_0$ — 정확히 **시간 지연 공식** 이다.

- 소리에 없는 순수 상대론적 효과
- 움직이는 광원은 느려진 시계다: 진동수가 γ 배 낮아진다
- 시간 지연의 독립적인 실험 검증 수단

37.6 운동량과 에너지

운동량을 다시 정의해야 한다

고전적 정의 $\vec{p} = m\vec{v}$ 를 그대로 쓰면, 로런츠 변환으로 좌표계를 바꿀 때 **운동량 보존이 깨진다**. 보존 법칙을 살리려면 정의를 수정해야 한다.

입자가 Δt 동안 Δx 를 움직였다. 새 정의는 거리는 관측자가 재되, 시간은 **입자 자신의 고유 시간** Δt_0 로 나눈다:

$$p = m \frac{\Delta x}{\Delta t_0} = m \frac{\Delta x}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta t_0} = \gamma m v$$

$$\boxed{\vec{p} = \gamma m \vec{v}}$$

- 저속에서는 $\gamma \approx 1 \rightarrow$ 고전 운동량으로 복귀
- $v \rightarrow c$ 이면 $p \rightarrow \infty$: 유한한 힘으로는 c 에 도달 불가

질량 에너지

1905년 아인슈타인은 **질량 자체가 에너지의 한 형태**임을 보였다. 질량 m 인 물체가 정지 상태에서 갖는 **질량 에너지(mass energy)** 또는 **정지 에너지(rest energy)** :

$$E_0 = mc^2$$

대상	질량	질량 에너지
전자	$9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$	$8.19 \times 10^{-14} \text{ J}$ (511 keV)
양성자	$1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$	$1.50 \times 10^{-10} \text{ J}$ (938 MeV)
먼지 입자	$\sim 10^{-13} \text{ kg}$	$\sim 10^4 \text{ J}$
동전 (3.1 g)	$3.1 \times 10^{-3} \text{ kg}$	$2.8 \times 10^{14} \text{ J}$

동전 하나의 질량 에너지는 대도시가 몇 시간 쓸 전력량이다. 화학 반응은 이 중 극히 일부만, 핵반응은 백만 배쯤 더 많이 꺼내 쓴다.

총 에너지와 운동 에너지

움직이는 입자의 **총 에너지(total energy)** 는 (퍼텐셜 에너지가 없다면):

$$\boxed{E = \gamma mc^2} \quad E = E_0 + K = mc^2 + K$$

두 식에서 **운동 에너지(kinetic energy)** 는:

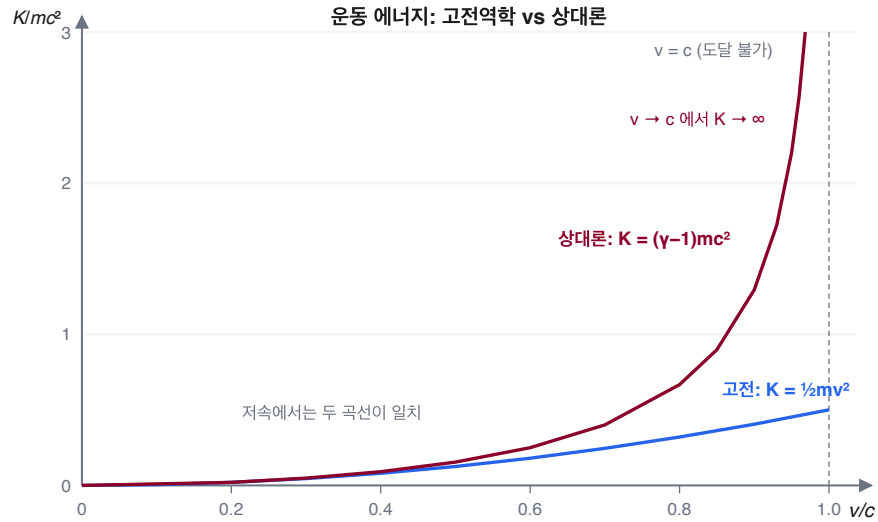
$$K = E - mc^2 = \gamma mc^2 - mc^2 = \boxed{(\gamma - 1) mc^2}$$

저속 극한을 확인하자. 이항 전개 $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}\beta^2$ 을 쓰면:

$$K \approx \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - 1\right) mc^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

고전 공식이 정확히 복원된다.

왜 c 를 넘을 수 없는가



- 저속에서는 두 곡선이 일치 — 지금까지 $\frac{1}{2}mv^2$ 을 써도 됐던 이유
- $v \rightarrow c$ 에서 상대론적 K 는 **무한대로 발산** : 속력을 c 까지 올리려면 무한한 일이 필요하다
- 입자가속기가 아무리 에너지를 부어도 속력이 c 아래에 머무는 이유 (베르토치 실험)

에너지-운동량 관계식의 유도

$p = \gamma mv$ 와 $E = \gamma mc^2$ 에서 v 를 소거하자. 먼저 둘을 나누면:

$$\frac{pc}{E} = \frac{\gamma mvc}{\gamma mc^2} = \frac{v}{c} = \beta \Rightarrow pc = \beta E$$

이제 $E^2 - (pc)^2$ 을 계산하면:

$$E^2 - (pc)^2 = E^2(1 - \beta^2) = \gamma^2 m^2 c^4 (1 - \beta^2) = m^2 c^4$$

($\gamma^2(1 - \beta^2) = 1$ 을 사용). 따라서:

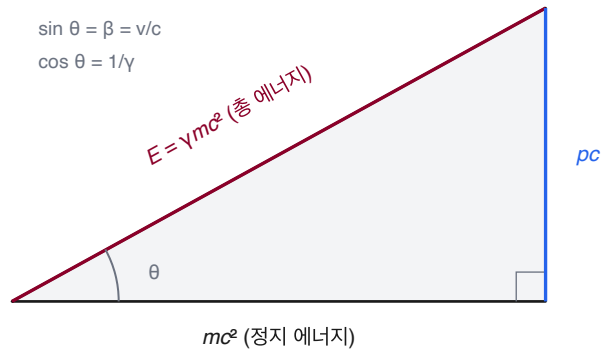
$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$$

$E = K + mc^2$ 을 대입하면 유용한 다른 형태도 얻는다:

$$(pc)^2 = K^2 + 2Kmc^2$$

에너지-운동량 삼각형

에너지-운동량 직각삼각형: $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$



운동 에너지: $K = E - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2$

- 빗변 E , 두 변 pc 와 mc^2 인 직각삼각형으로 기억하면 편하다
- $\sin \theta = \beta, \cos \theta = 1/\gamma$
- pc 는 에너지 단위 $\rightarrow$ 입자물리에서 운동량을 MeV/c 단위로 쓴다

예제 4: 전자의 에너지와 운동량

운동 에너지가 $K = 2.53 \text{ MeV}$ 인 전자가 있다 (전자의 정지 에너지 $mc^2 = 0.511 \text{ MeV}$). (a) 총 에너지 E , (b) 운동량 p 를 구하라.

(a) 총 에너지는 정지 에너지와 운동 에너지의 합:

$$E = mc^2 + K = 0.511 \text{ MeV} + 2.53 \text{ MeV} = \boxed{3.04 \text{ MeV}}$$

(b) 에너지-운동량 관계식 $E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$ 에서:

$$pc = \sqrt{E^2 - (mc^2)^2} = \sqrt{(3.04)^2 - (0.511)^2} = \sqrt{8.98} = 3.00 \text{ MeV}$$

$$\boxed{p = 3.00 \text{ MeV}/c}$$

핵반응과 Q값

반응에서 방출되는 에너지는 **질량의 감소** 에서 나온다. 반응 전 총 질량 M_i , 반응 후 M_f 라 하면 **Q 값**:

$$Q = M_i c^2 - M_f c^2 = -\Delta M c^2$$

- $Q > 0$ (질량 감소): 에너지가 **방출** — 핵분열, 핵융합
- $Q < 0$ (질량 증가): 에너지를 **흡수** 해야 반응이 일어남

태양은 수소 핵융합(${}^1\text{H} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^2\text{H} + e^+ + \nu$ 등)으로 매초 약 4×10^9 kg의 질량을 빛 에너지로 바꾼다. 우리가 받는 햇빛이 바로 $E_0 = mc^2$ 의 증거다.

Review & Summary (1)

시간과 공간의 상대성

- **두 가설** : 물리 법칙은 모든 관성계에서 같다; 진공 중 광속은 모든 관성계에서 같은 c
- **동시성** : 상대 운동하는 관측자들은 두 사건의 동시성에 일반적으로 동의하지 않는다
- **시간 지연** : 같은 장소의 두 사건을 시계 하나로 잰 고유 시간 Δt_0 가 최소 — 다른 좌표계에서는 $\Delta t = \gamma \Delta t_0$
- **길이 수축** : 정지 좌표계에서 잰 고유 길이 L_0 가 최대 — 움직이며 재면 $L = L_0/\gamma$
- **로런츠 변환** : $x' = \gamma(x - vt)$, $t' = \gamma(t - vx/c^2)$ — 위 결과가 모두 이 식에서 나온다
- **속도 변환** : $u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2}$ — 어떻게 더해도 c 를 넘지 못한다

Review & Summary (2)

핵심 공식

개념	공식
로런츠 인자	$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}, \beta = v/c$
시간 지연	$\Delta t = \gamma \Delta t_0$
길이 수축	$L = L_0/\gamma$
도플러 (멀어질 때)	$\lambda = \lambda_0 \sqrt{(1+\beta)/(1-\beta)}$
운동량 / 총 에너지	$\vec{p} = \gamma m \vec{v}, E = \gamma mc^2 = mc^2 + K$
에너지-운동량 관계	$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$

기억할 것:

- 고유 시간·고유 길이는 "누구 좌표계에서 잤는가"로 판정한다
- 저속 극한에서 모든 식은 고전역학으로 돌아간다 ($\gamma \rightarrow 1$)
- 질량은 에너지다: $E_0 = mc^2$, 운동 에너지는 $K = (\gamma - 1)mc^2$
- 상대성이론은 GPS·가속기·천문학에서 매일 검증되는 현실의 물리다