

36장: 회절

Diffraction

지난 장과 이번 장

35장에서 우리는 두 개의 좁은 슬릿을 지난 빛이 만드는 **간섭(interference)** 무늬를 배웠다. 그때 슬릿은 "무한히 좁다"고 가정했다.

이번 장에서는 그 가정을 걷어낸다.

- 슬릿의 **폭** 이 유한하면, 하나의 슬릿만으로도 무늬가 생긴다 → **회절(diffraction)**
- 회절은 빛이 좁은 틈이나 모서리를 지날 때 **퍼지면서 스스로 간섭** 하는 현상이다
- 렌즈·망원경·눈의 **분해능** , 분광기의 **회절 격자** , 결정 구조를 밝히는 **X선 회절** 까지 — 모두 이번 장의 물리다

일상 속의 회절: CD의 무지개



CD 표면의 미세한 트랙(간격 약 $1.6 \mu\text{m}$)이 **회절 격자(diffraction grating)** 역할을 해서 백색광을 색깔별로 갈라놓는다. 이번 장이 끝나면 이 무지개색의 각도를 직접 계산할 수 있다.

이번 장의 핵심 결론

1. **단일슬릿의 어두운 무늬** : 폭 a 인 슬릿, 파장 λ 일 때

$$a \sin \theta = m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

2. **원형 개구의 분해능 (레일리 기준)** : 지름 d 인 구멍(렌즈)의 한계각

$$\theta_R = 1.22 \frac{\lambda}{d}$$

3. **회절 격자의 밝은 선** 과 **브래그 법칙**

$$d \sin \theta = m\lambda, \quad 2d \sin \theta = m\lambda$$

36.1 단일슬릿 회절

회절이란 무엇인가

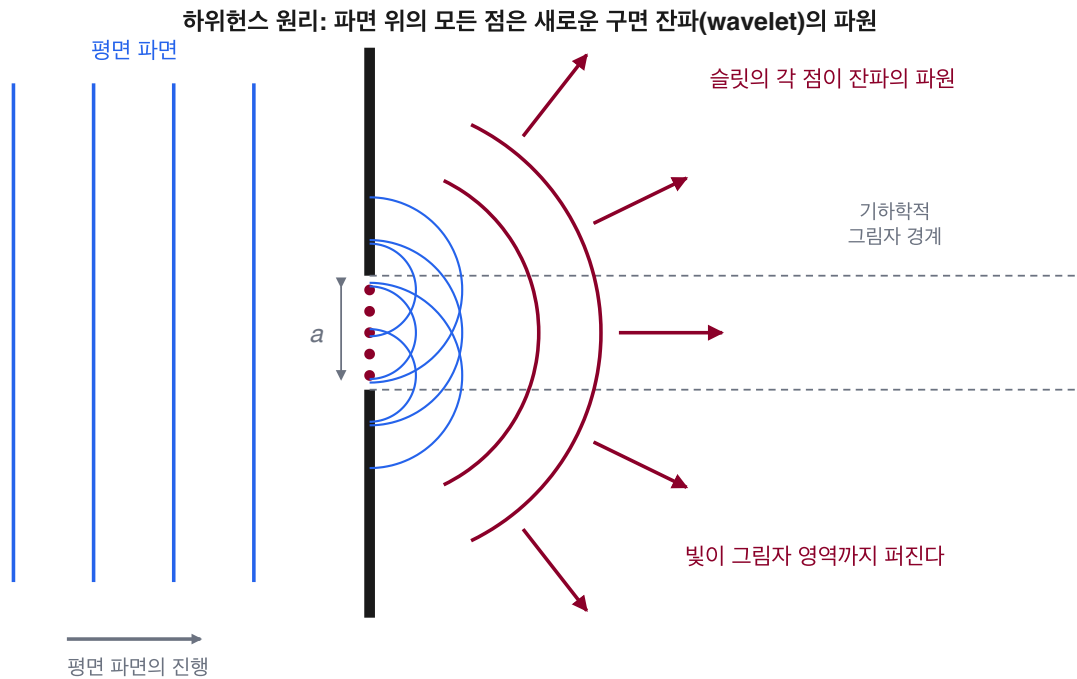
파동이 파장과 비슷한 크기의 **틈(aperture)** 이나 **모서리(edge)** 를 만나면, 직진하지 않고 **퍼져 나가면서 간섭** 한다. 이것이 **회절(diffraction)** 이다.

- 기하광학이라면: 슬릿 모양 그대로의 밝은 띠가 스크린에 생겨야 한다
- 실제로는: **넓고 밝은 중앙 극대** + 양옆의 약한 **곁 극대(side maxima)** + 그 사이의 **극소(어두운 무늬)** 가 생긴다

기하광학은 근사일 뿐이고, 빛의 **파동성** 이 드러나는 대표적 현상이다.

하위헌스 원리로 보는 회절

하위헌스 원리(Huygens' principle) : 파면 위의 모든 점은 새로운 구면 잔파(wavelet)의 파원이 되고, 다음 순간의 파면은 이 잔파들의 포락면이다.



슬릿을 지나는 순간 슬릿 안의 각 점이 파원이 되어, 빛은 기하학적 그림자 영역까지 퍼진다. 퍼진 잔파들이 서로 간섭하여 밝고 어두운 무늬를 만든다.

일상에서 만나는 회절

- **소리의 회절** : 문이 조금만 열려 있어도 방 안의 소리가 들린다 — 소리의 파장(수십 cm~수 m)이 문틈과 비슷해서 크게 퍼진다
- **손가락 틈** : 두 손가락을 거의 붙이고 밝은 빛을 보면 틈 사이에 어두운 줄무늬가 보인다
- **비문증(floaters)** : 밝은 하늘을 볼 때 떠다니는 실오라기 — 눈 속 유리체의 작은 부유물이 만드는 회절 무늬가 망막에 맺힌 것
- **가로등 주변의 빛 번짐 고리** : 각막·수정체 속 미세 구조가 만드는 회절

빛의 파장은 약 $0.5\ \mu\text{m}$ 로 매우 짧아서, 회절이 잘 보이려면 틈도 그만큼 좁아야 한다.

역사: 프레넬 밝은 점

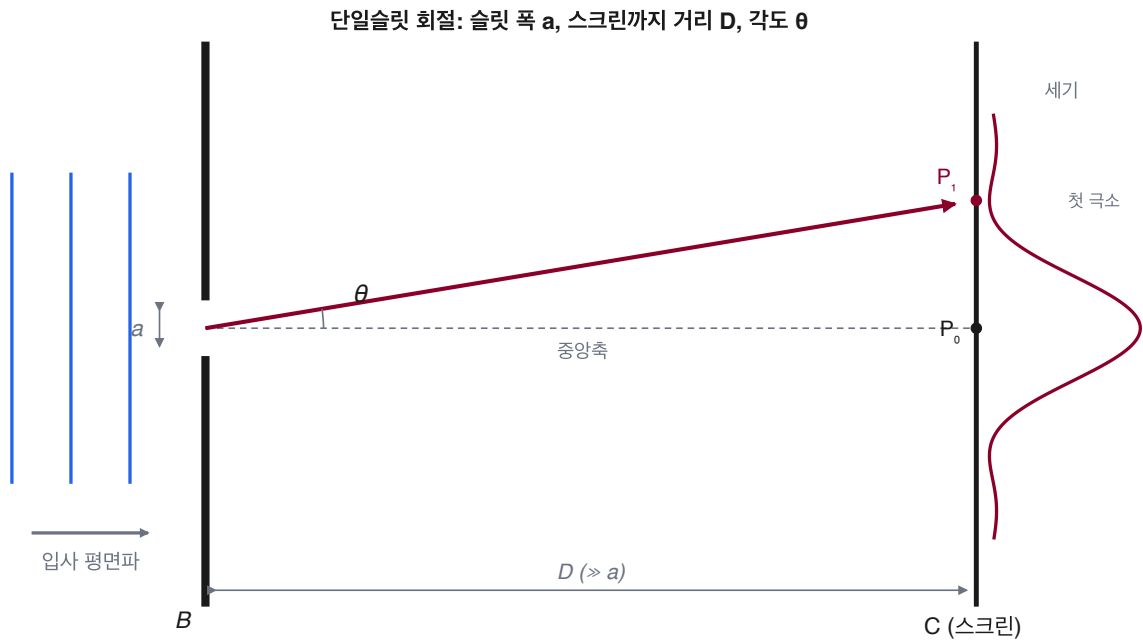
19세기 초까지도 뉴턴의 입자설이 우세했다. 1819년 프랑스 과학원 공모전에서 **프레넬(Fresnel)** 이 빛의 파동설로 회절을 설명하자, 입자설 지지자 **푸아송(Poisson)** 이 반박했다.

"파동설이 맞다면, 둥근 원판의 그림자 **한가운데** 에 밝은 점이 생겨야 한다. 이는 말도 안 된다!"

실험을 해 보니 — 그 밝은 점이 **실제로 있었다**. 이것이 **프레넬 밝은 점(Fresnel bright spot)** 이다. 원판 가장자리를 돌아온 잔파들이 중심축 위에서는 모두 같은 거리를 지나 **보강 간섭** 하기 때문이다. 파동설의 결정적 승리였다.

단일슬릿 실험의 기하

폭 a 인 긴 슬릿에 파장 λ 인 평면파를 비추고, 멀리 떨어진 스크린($D \gg a$)에 생기는 무늬를 본다.



- 스크린 위의 점은 중앙축에서 잰 **각도 θ** 로 표시한다
- 슬릿 안의 서로 다른 점에서 출발한 잔파들이 그 점에서 간섭한다
- $D \gg a$ 이므로 한 점으로 가는 광선들은 **평행** 하다고 근사할 수 있다

중앙은 왜 밝은가

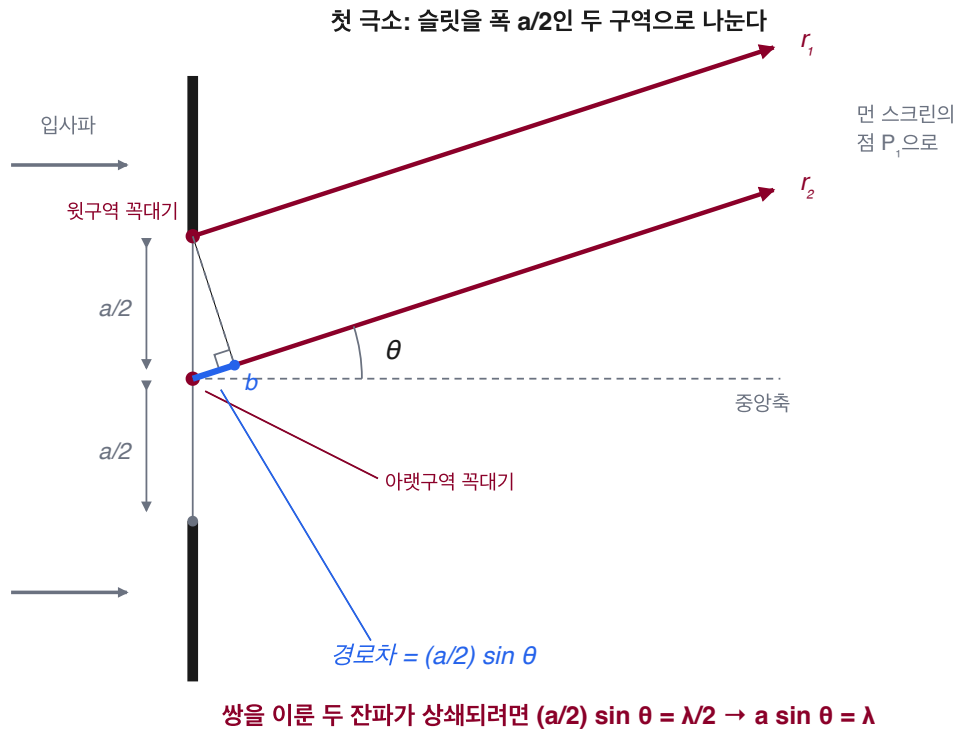
중앙점 $P_0(\theta = 0)$ 를 보자.

- 슬릿 안 **모든 점** 에서 P_0 까지의 거리가 (거의) 같다
- 잔파들이 모두 **같은 위상** 으로 도착한다 → 완전 보강 간섭
- 따라서 중앙에는 항상 **밝고 넓은 중앙 극대(central maximum)** 가 생긴다

문제는 어두운 무늬(극소)의 위치다. 여기서 교재는 영리한 전략을 쓴다: 슬릿을 **같은 폭의 구역(zone)**으로 나누어 잔파를 **쌍으로 짝지어** 상쇄 조건을 찾는다.

첫 극소: 슬릿을 반으로 나눈다

슬릿을 폭 $a/2$ 인 **두 구역**으로 나누고, 윗구역 꼭대기에서 나온 광선 r_1 과 아랫구역 꼭대기(슬릿 중앙)에서 나온 광선 r_2 를 생각한다.



두 광선은 슬릿에서 같은 위상으로 출발하지만, P_1 까지 가는 **경로차(path length difference)**는 그림의 직각삼각형에서

$$\Delta L = \frac{a}{2} \sin \theta$$

첫 극소의 조건

두 잔파가 P_1 에서 상쇄되려면 경로차가 반파장이어야 한다:

$$\frac{a}{2} \sin \theta = \frac{\lambda}{2}$$

핵심은 이 논리가 r_1 , r_2 만이 아니라 **두 구역의 대응점 모든 쌍**에 적용된다는 것이다. 윗구역의 어떤 점이든, 그보다 $a/2$ 아래의 점과 짝을 이루어 정확히 $\lambda/2$ 의 경로차로 상쇄된다.

슬릿 전체의 빛이 쌍쌍이 소멸하므로 P_1 은 완전히 어둡다:

$a \sin \theta = \lambda$ (첫 극소)

슬릿을 좁히면 무늬는 넓어진다

첫 극소 조건 $\sin \theta_1 = \lambda/a$ 에서 바로 읽을 수 있다:

- 슬릿을 **좁힐수록** ($a \downarrow$) $\rightarrow \theta_1$ 이 **커진다** $\rightarrow$ 빛이 더 넓게 퍼진다
- 파장을 **늘릴수록** ($\lambda \uparrow$) $\rightarrow$ 같은 효과
- $a = \lambda$ 가 되면 $\sin \theta_1 = 1$, 즉 $\theta_1 = 90^\circ \rightarrow$ **중앙 극대가 스크린 전체를 덮는다**

"좁은 틈일수록 더 퍼진다"는 직관과 반대처럼 느껴지지만, 이것이 파동의 본성이다. 35장에서 이중슬릿을 "점광원"으로 취급할 수 있었던 것도 $a \ll \lambda$ 조건 덕분이다.

둘째 극소: 슬릿을 넷으로 나눈다

같은 전략으로 슬릿을 폭 $a/4$ 인 **네 구역**으로 나눈다. 이웃한 구역의 대응점 쌍의 경로차가 $\lambda/2$ 이면 네 구역의 빛이 쌍쌍이 상쇄된다:

$$\frac{a}{4} \sin \theta = \frac{\lambda}{2} \quad \Rightarrow \quad a \sin \theta = 2\lambda \quad (\text{둘째 극소})$$

일반적으로 슬릿을 $2m$ 개의 구역으로 나누면 m 번째 극소를 얻는다:

$a \sin \theta = m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{극소 — 어두운 무늬})$

암기법 : 슬릿의 맨 위와 맨 아래 광선의 경로차가 $a \sin \theta$ 인데, 이것이 **파장의 정수배** 일 때 어둡다.

주의: 경로차가 λ 인데 왜 어두운가

"맨 위와 맨 아래 광선의 경로차가 정확히 λ 이면 두 광선은 같은 위상 아닌가? 그런데 왜 밝지 않고 어둡지?"

- 무늬는 **두 광선** 이 아니라 슬릿 전체의 **무수히 많은 잔파** 가 만든다
- 경로차가 $a \sin \theta = \lambda$ 일 때, 슬릿의 **모든** 잔파는 자신과 정확히 $\lambda/2$ 어긋난 짝을 하나씩 갖는다
- 모든 잔파가 짝과 함께 소멸하므로 알짜 진폭은 0이다

밝은 겹극대는 이웃한 극소들의 대략 중간에 있다 (정확한 위치는 36.2에서).

예제 1: 백색광 단일슬릿

폭 a 인 슬릿에 백색광을 비추었더니, 파장 $\lambda = 650 \text{ nm}$ 인 빨간빛의 첫 극소가 $\theta = 15^\circ$ 에 생겼다.

(a) 슬릿 폭 a 는?

첫 극소 조건 $a \sin \theta = m\lambda$ 에 $m = 1$ 을 대입:

$$a = \frac{m\lambda}{\sin \theta} = \frac{(1)(650 \text{ nm})}{\sin 15^\circ} = \frac{650}{0.2588} \text{ nm} \approx 2511 \text{ nm} \approx 2.5 \mu\text{m}$$

빛이 $\pm 15^\circ$ 나 퍼지려면 슬릿이 파장의 겨우 4배 정도로 좁아야 한다. 머리카락 굵기 (약 $100 \mu\text{m}$)의 $1/40$ 이다.

예제 1 (계속)

(b) 같은 15° 방향에 첫 결 극대가 오는 빛의 파장 λ' 는?

결 극대는 극소들의 대략 중간에 있으므로, $m = 1$ 과 $m = 2$ 사이인 $m \approx 1.5$ 로 근사한다:

$$a \sin \theta = 1.5\lambda' \quad \Rightarrow \quad \lambda' = \frac{a \sin 15^\circ}{1.5} = \frac{(2511 \text{ nm})(0.2588)}{1.5} \approx 433 \text{ nm}$$

약 430 nm의 **보라색** 빛이다. 즉 같은 각도에서 빨간빛은 어둡고 보라빛은 밝다 — 백색광 회절 무늬에 색이 지는 이유다.

36.2 단일슬릿 회절의 세기

목표: 세기 $I(\theta)$ 의 완전한 공식

36.1에서는 **극소의 위치**만 구했다. 이제 임의의 각 θ 에서 **세기(intensity)**를 구한다.

전략: 슬릿을 폭 Δx 인 N 개의 미소 구역으로 나누고, 각 구역을 잔파의 점파원으로 취급하여 **위상자(phasor)**로 합성한다.

이웃한 구역에서 나온 잔파 사이의 경로차는 $\Delta x \sin \theta$ 이므로, 위상차는

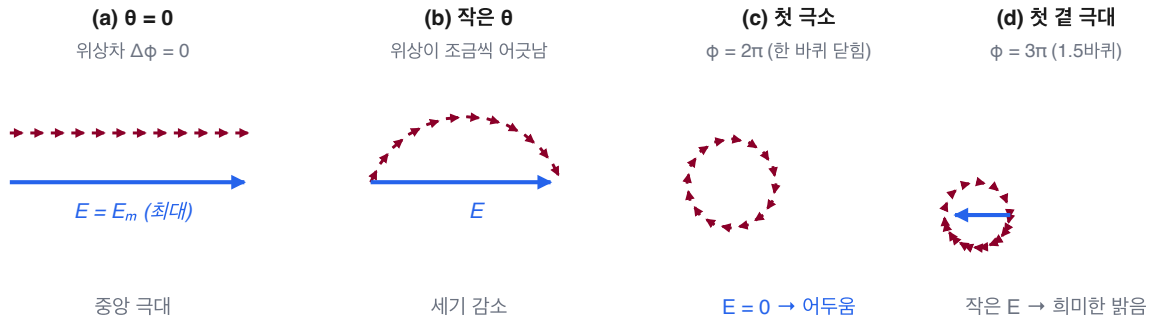
$$\Delta\phi = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) (\Delta x \sin \theta)$$

$\theta = 0$ 이면 $\Delta\phi = 0$, θ 가 커질수록 위상차가 커진다.

위상자로 본 네 지점

N 개의 위상자를 머리-꼬리로 이어 붙인 합성 벡터의 길이가 전기장 진폭 E 다.

위상자(phasor)로 보는 단일슬릿: 슬릿을 N 개 구역으로 나눠 잔파를 벡터합



θ 가 커질수록 이웃 위상자 사이 위상차 $\Delta\phi = (2\pi/\lambda)\Delta x \sin \theta$ 가 커져 사슬이 말린다

- (a) $\theta = 0$: 모두 같은 위상, 일직선 $\rightarrow E = E_m$ (중앙 극대)
- (b) 작은 θ : 사슬이 호를 그리며 진폭 감소
- (c) 전체 위상차 $\phi = 2\pi$: 사슬이 한 바퀴 닫힌다 $\rightarrow E = 0$ (첫 극소)
- (d) $\phi = 3\pi$: 1.5바퀴 감긴 코일 $\rightarrow$ 작은 E (첫 곁 극대)

세기 공식

결과를 먼저 쓰면:

$$I(\theta) = I_m \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2, \quad \alpha = \frac{1}{2} \phi = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta$$

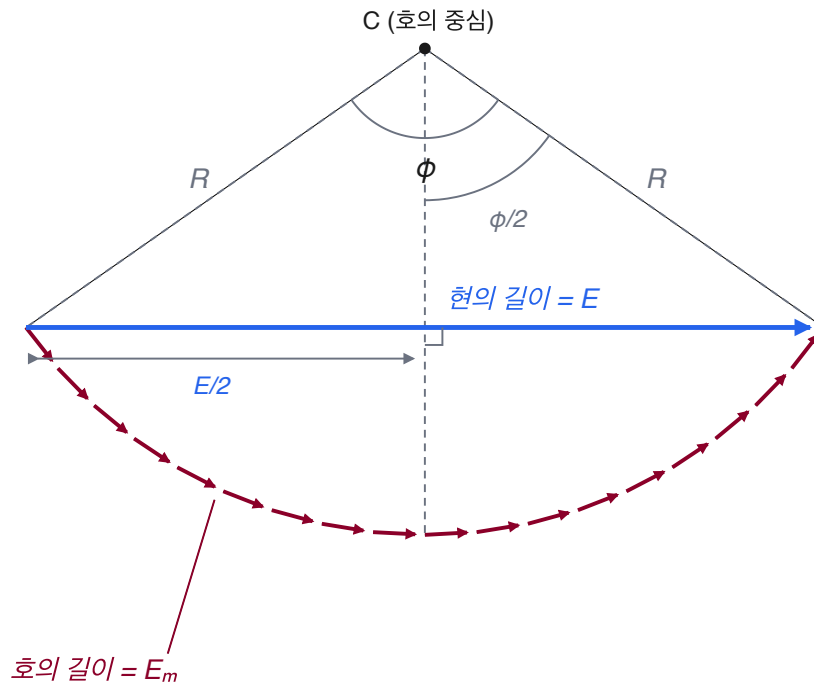
- I_m : 중앙($\theta = 0$)의 최대 세기
- ϕ : 슬릿 맨 위와 맨 아래 잔파 사이의 **전체 위상차**
- α 는 각 θ 와 세기를 잇는 편리한 매개변수일 뿐이다

이제 이 공식을 위상차 호의 기하로 유도하자.

유도 1: 위상자 사슬을 호로 보낸다

$N \rightarrow \infty$ 로 보내면 위상자 사슬은 반지름 R 인 원호가 된다.

위상자 호(arc)의 기하: 세기 공식의 유도



$$\sin(\phi/2) = (E/2)/R, \phi = E_m/R \rightarrow E = E_m \cdot \sin(\phi/2)/(\phi/2)$$

- **호의 길이** 는 위상자 길이의 총합, 즉 중앙 극대의 진폭 E_m (곧게 펴면 $\theta = 0$ 의 배열)
- **현(chord)의 길이** 가 실제 진폭 E
- 호가 중심에 대해 벌어진 각이 바로 전체 위상차 ϕ

유도 2: 호의 기하에서 공식까지

중심에서 현에 수선을 내리면 두 개의 합동 직각삼각형이 생기고,

$$\sin \frac{\phi}{2} = \frac{E/2}{R} \quad \Rightarrow \quad E = 2R \sin \frac{\phi}{2}$$

호의 길이가 E_m 이고 중심각이 ϕ (라디안)이므로 $E_m = R\phi$, 즉 $R = E_m/\phi$. 대입하면:

$$E = \frac{2E_m}{\phi} \sin \frac{\phi}{2} = E_m \frac{\sin(\phi/2)}{\phi/2}$$

세기는 진폭의 제곱에 비례하므로 ($\alpha \equiv \phi/2$):

$$\frac{I(\theta)}{I_m} = \left(\frac{E}{E_m} \right)^2 = \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2$$

유도 3: α 와 θ 의 관계

ϕ 는 슬릿 맨 위와 맨 아래 잔파 사이의 위상차이므로, 경로차 $a \sin \theta$ 에 대응한다:

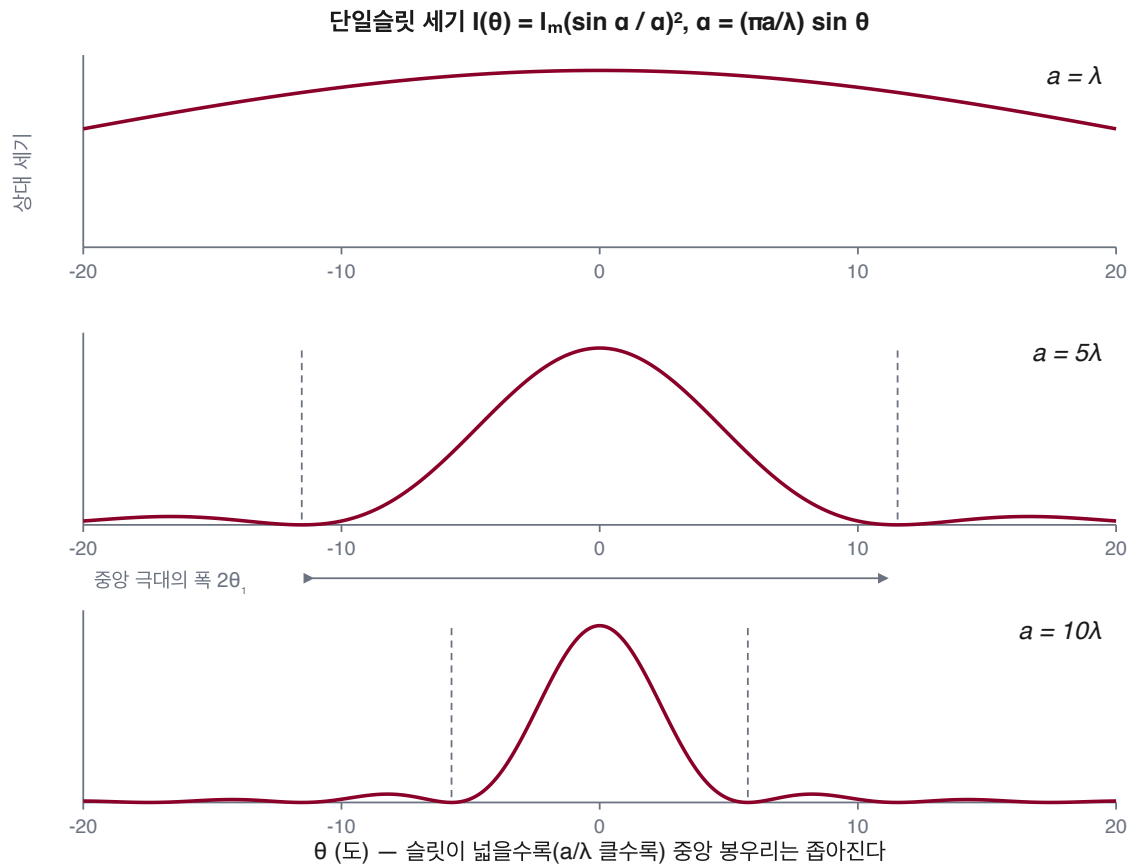
$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} (a \sin \theta) \Rightarrow \alpha = \frac{\phi}{2} = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta$$

극소 위치 확인: $\sin \alpha = 0$ 이면서 $\alpha \neq 0$ 인 곳, 즉

$$\alpha = m\pi \Rightarrow \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta = m\pi \Rightarrow a \sin \theta = m\lambda$$

36.1에서 구역 나누기로 얻은 결과와 정확히 일치한다.

세기 분포: 슬릿 폭의 효과



a/λ 가 클수록(넓은 슬릿) 중앙 극대가 좁아진다. $a \gg \lambda$ 이면 회절이 거의 사라지고 기하광학의 직진 그림으로 돌아간다.

결 극대는 얼마나 밝은가

결 극대는 대략 $\alpha = (m + \frac{1}{2})\pi$ 에 있다 ($m = 1, 2, \dots$). 이때 $\sin \alpha = \pm 1$ 이므로:

$$\frac{I}{I_m} \approx \frac{1}{\left[(m + \frac{1}{2})\pi\right]^2}$$

결 극대	α	I/I_m
첫째 ($m = 1$)	1.5π	약 4.5%
둘째 ($m = 2$)	2.5π	약 1.6%
셋째 ($m = 3$)	3.5π	약 0.83%

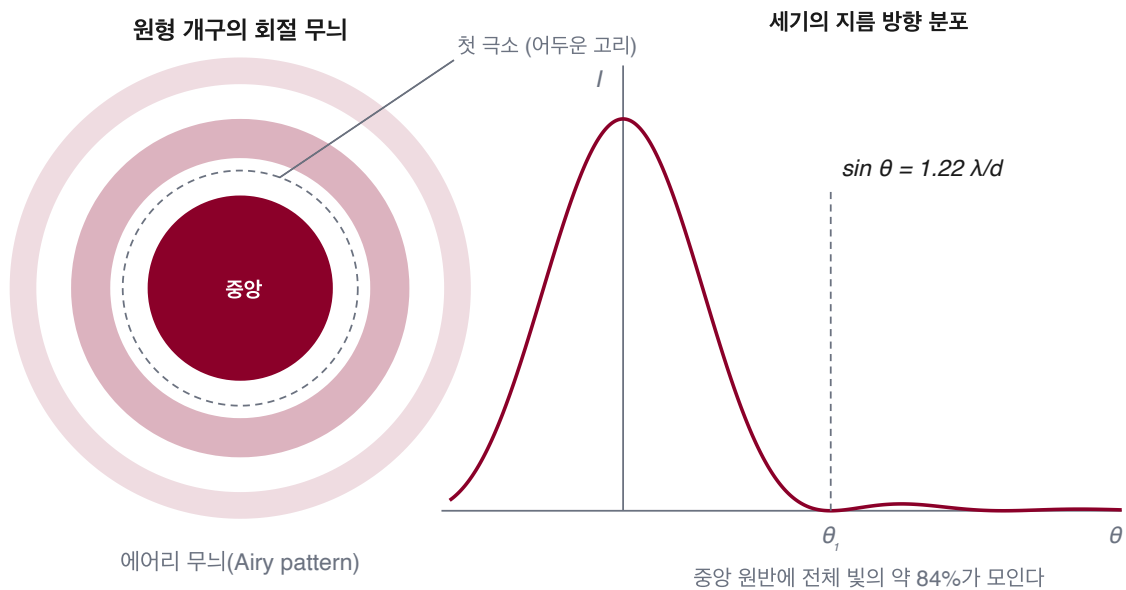
결 극대는 급격히 어두워진다. 회절 무늬 사진에서 결 극대를 보이게 하려면 중앙을 과다 노출시켜야 할 정도다.

시뮬레이션: 단일슬릿 회절 — 슬릿 폭 a 와 파장 λ 에 따른 세기 분포,
이중슬릿 모드

36.3 원형 개구 회절

에어리 무늬

빛이 지름 d 인 **원형 개구(circular aperture)** — 동그란 구멍, 렌즈, 눈동자 — 를 지나면, 점이 아니라 **밝은 원반 + 동심원 고리** 의 회절 무늬가 생긴다. 이를 **에어리 무늬(Airy pattern)** 라 한다.



복잡한 해석(베셀 함수)의 결과, 첫 극소는

$$\sin \theta = 1.22 \frac{\lambda}{d} \quad (\text{원형 개구의 첫 극소})$$

슬릿의 $\sin \theta = \lambda/a$ 와 비교하면, 원형이라는 기하 때문에 **1.22** 라는 인자가 붙는다.

렌즈의 상도 회절 무늬다

렌즈, 망원경, 카메라, 사람의 눈 — 모두 빛이 **유한한 지름의 원형 개구** 를 통과한다.

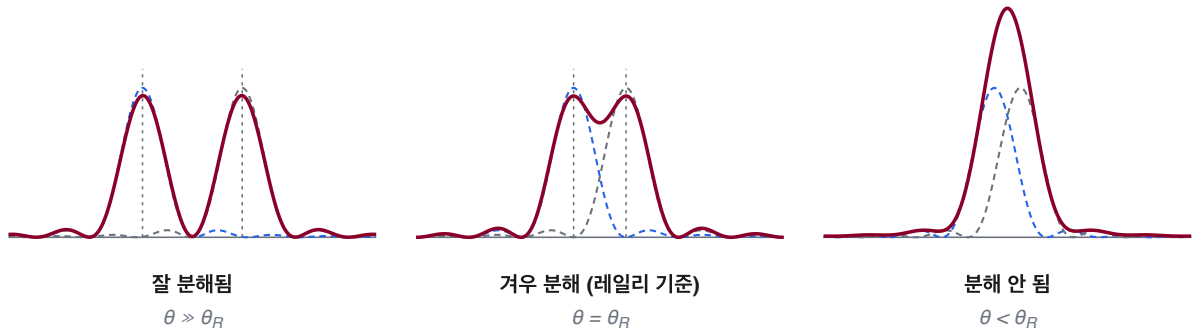
- 점광원(별)의 상은 이상적인 점이 아니라 **에어리 원반** 이다
- 두 점광원이 가까우면 두 에어리 원반이 **겹쳐서** 구분할 수 없게 된다
- 즉 회절이 모든 광학기기의 **분해능(resolvability)** 에 근본적인 한계를 준다

아무리 완벽하게 만든 렌즈라도 이 한계는 피할 수 없다. 문제는: 두 점광원을 구분할 수 있는 **최소 각분리** 는 얼마인가?

레일리 기준

레일리 기준: 한 상의 중앙 극대가 다른 상의 첫 극소에 놓일 때 겨우 분해된다

$$\theta_R = 1.22 \lambda/d \text{ (점선: 각 점광원의 회절 무늬, 실선: 합쳐진 세기)}$$



레일리 기준(Rayleigh's criterion) : 한 상의 **중앙 극대** 가 다른 상의 **첫 극소** 위에 올 때, 두 상은 겨우 분해된다.

첫 극소각이 $\sin \theta = 1.22 \lambda/d$ 이고 각이 작으므로 $\sin \theta_R \approx \theta_R$:

$$\theta_R = 1.22 \frac{\lambda}{d} \quad (\text{레일리 기준, 라디안})$$

분해능을 높이려면

두 점광원의 각분리 θ 가 θ_R 보다 크면 분해되고, 작으면 하나로 뭉개진다.

$$\theta_R = 1.22 \frac{\lambda}{d}$$

- **개구를 키운다** ($d \uparrow$): 천체 망원경의 거울을 크게 만드는 이유
- **파장을 줄인다** ($\lambda \downarrow$): 현미경에서 자외선·전자빔(전자현미경)을 쓰는 이유

사람 눈의 실제 분해능은 여러 요인(망막 세포 간격, 수차 등)으로 이보다 나쁘지만, 계산에서는 레일리 기준을 한계로 쓴다.

예제 2: 렌즈의 분해능

지름 $d = 32.0 \text{ mm}$, 초점거리 $f = 24.0 \text{ cm}$ 인 수렴렌즈가 멀리 있는 두 점광원의 상을 초점면에 맺는다. $\lambda = 550 \text{ nm}$.

(a) 레일리 기준을 만족하는 최소 각분리는?

$$\theta_R = 1.22 \frac{\lambda}{d} = 1.22 \times \frac{550 \times 10^{-9} \text{ m}}{32 \times 10^{-3} \text{ m}} = 2.1 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

(b) 이때 초점면에서 두 상의 중심 사이 거리는?

작은 각 근사에서 상의 간격은 $\Delta x = f\theta_R$:

$$\Delta x = (0.24 \text{ m})(2.1 \times 10^{-5} \text{ rad}) \approx 5.0 \mu\text{m}$$

실생활: 눈의 분해능

밤길에 마주 오는 자동차의 두 헤드라이트(간격 약 1.4 m)는 얼마나 멀리서부터 두 개로 보일까? 동공 지름 $d = 5.0 \text{ mm}$, $\lambda = 550 \text{ nm}$ 로 잡으면:

$$\theta_R = 1.22 \times \frac{550 \times 10^{-9}}{5.0 \times 10^{-3}} \approx 1.3 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

각분리 $\theta = (1.4 \text{ m})/L$ 이 θ_R 과 같아지는 거리:

$$L = \frac{1.4}{1.3 \times 10^{-4}} \approx 1.0 \times 10^4 \text{ m} \approx 10 \text{ km}$$

10 km보다 멀면 헤드라이트 두 개가 **한 점**으로 보인다. (실제로는 대기 요동과 눈의 한계로 이보다 가까워야 분해된다.)

실생활: 픽셀이 안 보이는 이유

스마트폰 화면(픽셀 간격 약 0.05 mm)을 눈($\theta_R \approx 1.3 \times 10^{-4}$ rad)으로 보면, 픽셀이 구분되는 한계 거리는

$$L = \frac{D}{\theta_R} = \frac{5 \times 10^{-5}}{1.3 \times 10^{-4}} \approx 0.4 \text{ m}$$

40 cm보다 멀리서 보면 픽셀들이 뭉개져 **연속된 색** 으로 보인다. 점묘법 (pointillism) 그림이 멀리서 보면 색이 섞여 보이는 것과 같은 원리다 — 화가가 관객의 회절 한계를 이용하는 셈이다.

36.4 이중슬릿 회절

35장의 가정을 걷어내면

35장의 이중슬릿 간섭에서는 슬릿 폭 $a \ll \lambda$ 를 가정했다. 그러면 각 슬릿의 중앙 극대가 스크린 전체를 덮어, 모든 간섭 무늬가 **같은 밝기**로 나타난다.

실제 슬릿은 폭이 유한하다. 그러면:

- 두 슬릿의 **간섭(interference)**이 밝은 무늬의 **위치**를 정하고
- 각 슬릿의 **회절(diffraction)**이 무늬들의 **밝기**를 조절한다

간섭 무늬 위에 단일슬릿 회절 무늬가 **포락선(envelope)**으로 씌워진다.

이중슬릿 회절의 세기 공식

폭 a 인 두 슬릿의 중심 간격이 d 일 때:

$$I(\theta) = I_m (\cos^2 \beta) \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2$$

$$\beta = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta, \quad \alpha = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta$$

- $\cos^2 \beta$: 간격 d 인 두 슬릿의 **간섭 인자** (35장의 결과)
- $(\sin \alpha / \alpha)^2$: 폭 a 인 단일슬릿의 **회절 인자** (36.2의 결과)

두 효과의 **곱** 이다.

극한에서 확인하기

공식이 옳다면 익숙한 두 극한을 되돌려 주어야 한다.

- $a \rightarrow 0$ (무한히 좁은 슬릿): $\alpha \rightarrow 0$ 이고 $\sin \alpha / \alpha \rightarrow 1$

$$I = I_m \cos^2 \beta \quad (\text{순수한 이중슬릿 간섭})$$

- $d \rightarrow 0$ (두 슬릿이 합쳐짐): $\beta \rightarrow 0$ 이고 $\cos^2 \beta \rightarrow 1$

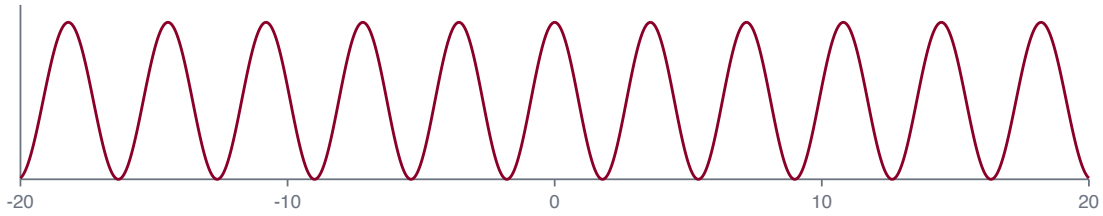
$$I = I_m \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \quad (\text{폭 } a \text{인 단일슬릿 회절})$$

용어 정리 : 적은 수의 결맞은 점파원이 겹치면 **간섭**, 한 파면 안의 연속적인 잔파들이 겹치면 **회절**이라 부른다. 둘 다 같은 중첩 원리이고, 실제 무늬에는 보통 둘 다 들어 있다.

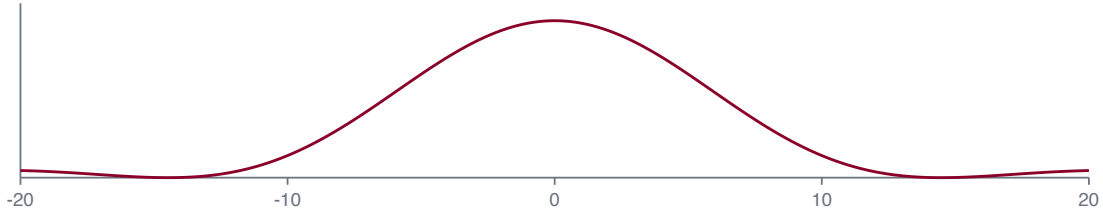
간섭 무늬에 씌워지는 회절 포락선

$$\text{이중슬릿 회절: } I(\theta) = I_m (\cos^2 \beta) (\sin \alpha / \alpha)^2$$

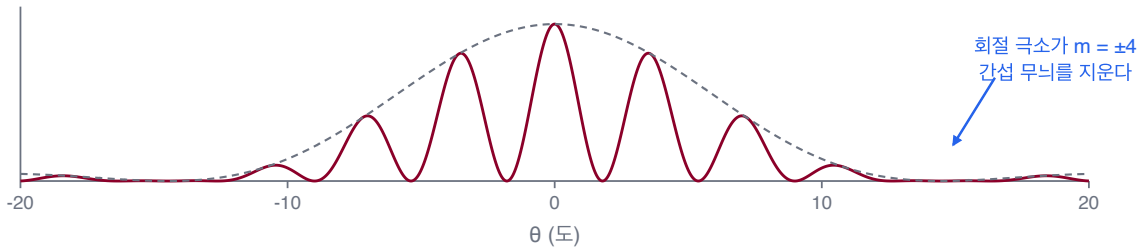
간섭 인자 $\cos^2 \beta$ (슬릿이 무한히 좁다면)



회절 인자 $(\sin \alpha / \alpha)^2$ (단일슬릿의 포락선)



실제 무늬 = 두 인자의 곱 ($d/a = 4$)



회절 극소($a \sin \theta = \lambda$)와 겹치는 간섭 무늬는 **지워진다**.

중앙 봉우리 속의 밝은 무늬 개수

- 간섭의 밝은 무늬: $d \sin \theta = m_2 \lambda$ ($m_2 = 0, 1, 2, \dots$)
- 회절의 첫 극소: $a \sin \theta = \lambda$

두 식을 나누면, 중앙 회절 봉우리의 가장자리에 해당하는 간섭 차수는

$$m_2 = \frac{d}{a}$$

즉 $|m_2| < d/a$ 인 간섭 무늬만 중앙 봉우리 안에 살아남는다. d/a 비가 무늬 개수를 결정한다 — $d/a = 4$ 이면 $m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ 의 7개가 남고, $m_2 = \pm 4$ 는 회절 극소와 정확히 겹쳐 소멸한다.

예제 3: 무늬 개수 세기

$\lambda = 405 \text{ nm}$, 슬릿 간격 $d = 19.44 \mu\text{m}$, 슬릿 폭 $a = 4.050 \mu\text{m}$.

(a) 중앙 회절 봉우리 안의 밝은 간섭 무늬는 몇 개인가?

$$m_2 = \frac{d}{a} = \frac{19.44 \mu\text{m}}{4.050 \mu\text{m}} = 4.8$$

$m_2 = 4$ 까지는 들어가고 $m_2 = 5$ 는 못 들어간다. 따라서 중앙 무늬($m_2 = 0$) 하나와 양쪽에 4개씩:

$$1 + 2 \times 4 = \boxed{9\text{개}}$$

예제 3 (계속)

(b) 첫 곁 회절 봉우리 안에는 몇 개인가?

첫 곁 봉우리는 회절의 첫 극소와 둘째 극소 사이, 즉 $a \sin \theta = \lambda$ 와 $a \sin \theta = 2\lambda$ 사이이다. 둘째 극소에 해당하는 간섭 차수는

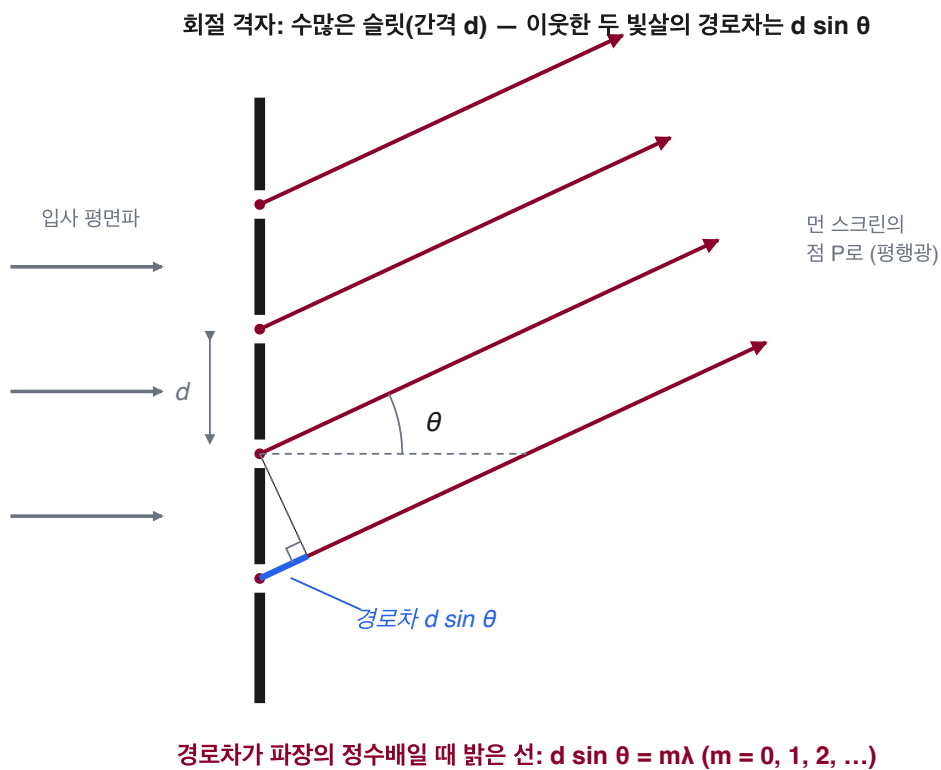
$$m_2 = \frac{2d}{a} = 9.6$$

따라서 $m_2 = 5, 6, 7, 8, 9$ 의 **5개**가 들어간다. 다만 $m_2 = 5$ 무늬는 회절 첫 극소 바로 옆이라 거의 소멸 상태이므로, 실제로 또렷이 보이는 것은 4개 정도다.

36.5 회절 격자

슬릿을 아주 많이 만들면

회절 격자(diffraction grating)는 슬릿(눈금, ruling)을 N 개 — 보통 1 mm에 수천 개 — 새긴 소자다. 빛을 파장별로 갈라 분석하는 데 쓰는 가장 중요한 광학 도구 중 하나다.



이웃한 슬릿 사이 간격 d 를 **격자 간격(grating spacing)**이라 한다. 전체 폭 w 에 N 개의 눈금이 있으면 $d = w/N$ 이다.

밝은 선의 위치

멀리 있는 점 P 로 가는 광선들은 평행하고, **이웃한 두 광선의 경로차는 $d \sin \theta$** 다.
이것이 파장의 정수배일 때 모든 슬릿의 빛이 보강 간섭한다:

$$d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{극대 — 밝은 선})$$

- m : **차수(order number)** — 0차(중앙), 1차, 2차, ...
- 같은 차수라도 파장이 길수록 θ 가 크다 → **파장별로 갈라진다**
- $\theta = \sin^{-1}(m\lambda/d)$ 를 측정하면 미지의 파장 λ 를 알아낼 수 있다

이중슬릿과 위치 공식은 같지만, 무늬의 **모양** 이 완전히 다르다: 넓은 줄무늬 대신 **아주 가늘고 예리한 선(line)** 이 생긴다.

선의 반폭: 왜 가늘어지는가

중앙선($\theta = 0$)의 **반폭(half-width)** $\Delta\theta_{\text{hw}}$: 선 중심에서 바로 옆 극소까지의 각이다.

N 개 슬릿 전체를 하나의 "폭 Nd 인 슬릿"으로 보면, 단일슬릿의 첫 극소 논리(맨 위-맨 아래 경로차 = λ)를 그대로 쓸 수 있다:

$$Nd \sin \Delta\theta_{\text{hw}} = \lambda$$

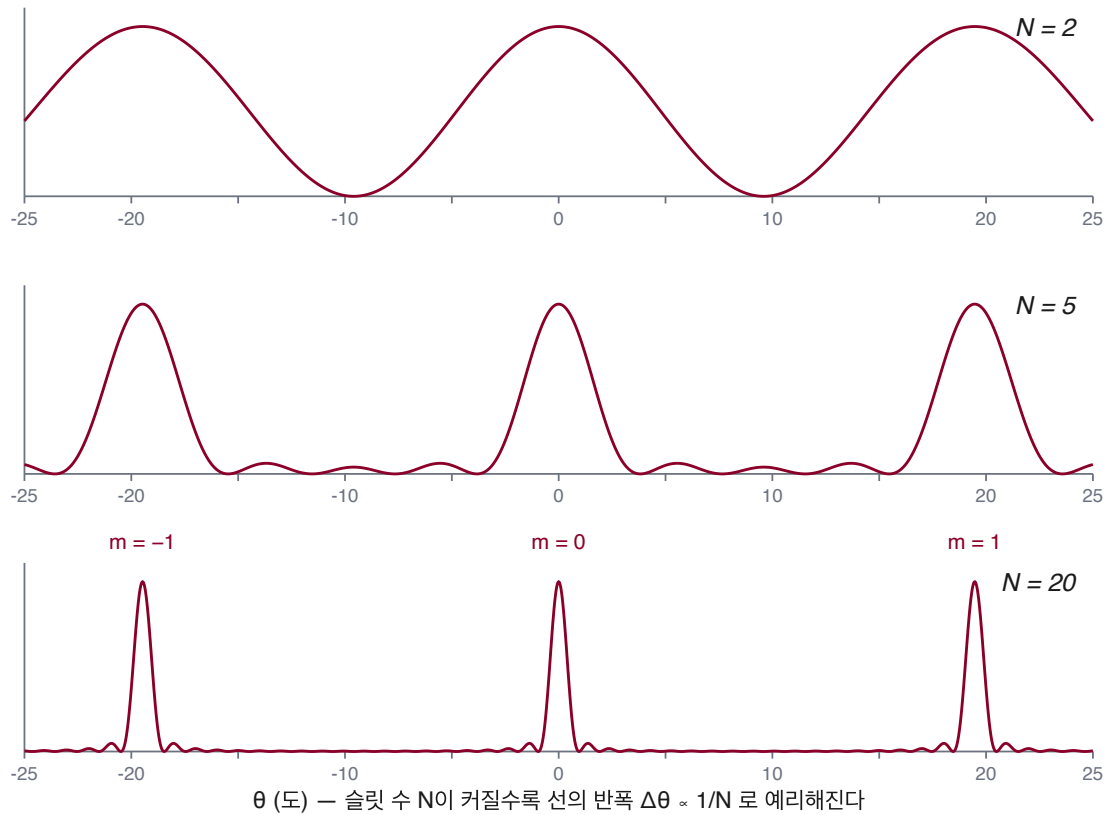
$\Delta\theta_{\text{hw}}$ 가 작으므로 $\sin \Delta\theta_{\text{hw}} \approx \Delta\theta_{\text{hw}}$:

$$\Delta\theta_{\text{hw}} = \frac{\lambda}{Nd} \quad (\text{중앙선}), \quad \boxed{\Delta\theta_{\text{hw}} = \frac{\lambda}{Nd \cos \theta} \quad (\theta \text{에 있는 선})}$$

N 이 클수록 선이 **가늘어진다**. $N \sim 10^4$ 이면 선폭은 이중슬릿($N = 2$) 무늬보다 수천 배 가늘다.

N 이 커질수록 선은 예리해진다

같은 d , 슬릿 수 N 만 증가: 극대의 위치($d \sin \theta = m\lambda$)는 그대로, 선은 예리하게



극대의 **위치**는 d 가 정하고($d \sin \theta = m\lambda$), 선의 **예리함**은 N 이 정한다.

격자 분광기

격자 분광기(grating spectroscope) : 광원 → 슬릿·시준기(collimator)로 평면파를 만들고 → 격자에 수직 입사 → 망원경을 각 θ 로 돌려 가며 선을 관측한다.

- 수소 방전등: 가시광 영역에 4개의 파장만 방출 — 눈으로는 그냥 희끗한 빛이지만, 분광기로는 각 차수마다 4개의 **방출선(emission line)**으로 분리된다
- $m = 0$: 모든 파장이 겹쳐 흰 선, $m \geq 1$: 파장별로 갈라짐 (짧은 파장이 작은 각)
- $\sin \theta = m\lambda/d > 1$ 이 되는 차수는 **생기지 않는다** (불완전 차수)

별빛을 격자에 통과시키면 스펙트럼선으로 별의 조성·온도·속도까지 알 수 있다 — 천체물리의 기본 도구다.

실생활: CD와 DVD의 무지개

CD 표면에는 나선형 트랙이 $d = 1.6 \mu\text{m}$ 간격으로 새겨져 있다 — 반사형 회절 격자다.

초록빛($\lambda = 550 \text{ nm}$)의 1차 극대 각도:

$$\sin \theta = \frac{m\lambda}{d} = \frac{(1)(550 \text{ nm})}{1600 \text{ nm}} = 0.344 \quad \Rightarrow \quad \theta \approx 20^\circ$$

- 빨강(700 nm)은 $\theta \approx 26^\circ$, 보라(400 nm)는 $\theta \approx 14.5^\circ$ — 보는 각도에 따라 색이 달라진다
- DVD는 트랙 간격이 $0.74 \mu\text{m}$ 로 더 좁아서 색이 더 넓게 갈라진다
- 신용카드의 홀로그램 무늬(OVG)도 미세 격자들이 만드는 회절 상이다

36.6 격자의 분산과 분해능

분산: 선을 얼마나 벌려 놓는가

가까운 두 파장을 구별하려면, 우선 두 선이 **각도로 많이 벌어져야** 한다. 파장 차 $\Delta\lambda$ 인 두 선의 각분리가 $\Delta\theta$ 일 때 **분산(dispersion)** 은

$$D = \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda}$$

유도 : $d \sin \theta = m\lambda$ 의 양변을 미분하면

$$d \cos \theta d\theta = m d\lambda \quad \Rightarrow \quad \boxed{D = \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} = \frac{m}{d \cos \theta}}$$

분산을 키우려면: 격자 간격 d 를 **줄이고** , 높은 차수 m 에서 관측한다. **눈금 수 N 과는 무관** 하다.

분해능: 선이 얼마나 가는가

벌어져 있어도 선이 뚱뚱하면 겹쳐 보인다. 겨우 구별되는 두 파장의 평균이 λ_{avg} , 차이가 $\Delta\lambda$ 일 때 **분해능(resolving power)** 은

$$R = \frac{\lambda_{\text{avg}}}{\Delta\lambda}$$

유도 : 레일리 기준에 따라, 두 선이 겨우 분해되려면 각분리 $\Delta\theta$ 가 선의 반폭과 같아야 한다:

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd \cos \theta}$$

분산 관계 $d \cos \theta \Delta\theta = m \Delta\lambda$ 에 대입하면

$$\frac{\lambda}{N} = m \Delta\lambda \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nm}$$

분산 vs 분해능

$\lambda = 589 \text{ nm}$, $m = 1$ 에서 세 격자를 비교하면:

격자	N	$d \text{ (nm)}$	θ	$D \text{ (}^\circ/\mu\text{m)}$	R
A	10 000	2540	13.4°	23.2	10 000
B	20 000	2540	13.4°	23.2	20 000
C	10 000	1360	25.5°	46.3	10 000

- A와 B: d 가 같아 **분산 동일** — 하지만 B는 N 이 2배라 선이 2배 가늘다 (분해능 2배)
 - A와 C: N 이 같아 **분해능 동일** — 하지만 C는 d 가 작아 선들을 2배 넓게 벌린다
- 분산은 "벌리기", 분해능은 "가늘게 만들기"** — 서로 다른 능력이다.

예제 4: 나트륨 이중선

나트륨 램프의 노란빛에는 $\lambda = 589.00 \text{ nm}$ 와 589.59 nm 의 두 방출선(**나트륨 이중선**)이 있다. 폭 $w = 25.4 \text{ mm}$ 에 눈금 $N = 1.26 \times 10^4$ 개인 격자로 관측한다.

(a) 589.00 nm 빛의 1차 극대는 몇 도에 생기는가?

격자 간격은

$$d = \frac{w}{N} = \frac{25.4 \times 10^{-3} \text{ m}}{1.26 \times 10^4} = 2016 \text{ nm}$$

$$\theta = \sin^{-1} \frac{m\lambda}{d} = \sin^{-1} \frac{(1)(589.00)}{2016} = \sin^{-1}(0.2922) \approx 17.0^\circ$$

예제 4 (계속)

(b) 1차에서 두 선의 각분리는?

$$D = \frac{m}{d \cos \theta} = \frac{1}{(2016 \text{ nm})(\cos 17.0^\circ)} = 5.19 \times 10^{-4} \text{ rad/nm}$$

$$\Delta\theta = D \Delta\lambda = (5.19 \times 10^{-4})(0.59 \text{ nm}) = 3.06 \times 10^{-4} \text{ rad} \approx 0.018^\circ$$

(c) 이중선을 1차에서 분해하는 데 필요한 최소 눈금 수는?

$$N = \frac{R}{m} = \frac{\lambda_{\text{avg}}}{m \Delta\lambda} = \frac{589.30 \text{ nm}}{(1)(0.59 \text{ nm})} \approx 999\text{개}$$

이 격자($N = 12600$)로는 여유 있게 분해된다.

36.7 X선 회절

X선에는 보통 격자가 소용없다

X선(x rays)은 파장이 약 $1 \text{ \AA} = 0.1 \text{ nm}$ 인 전자기파다 (가시광의 약 1/5000).

$\lambda = 0.1 \text{ nm}$ 를 $d = 3000 \text{ nm}$ 짜리 좋은 격자에 넣어 보면:

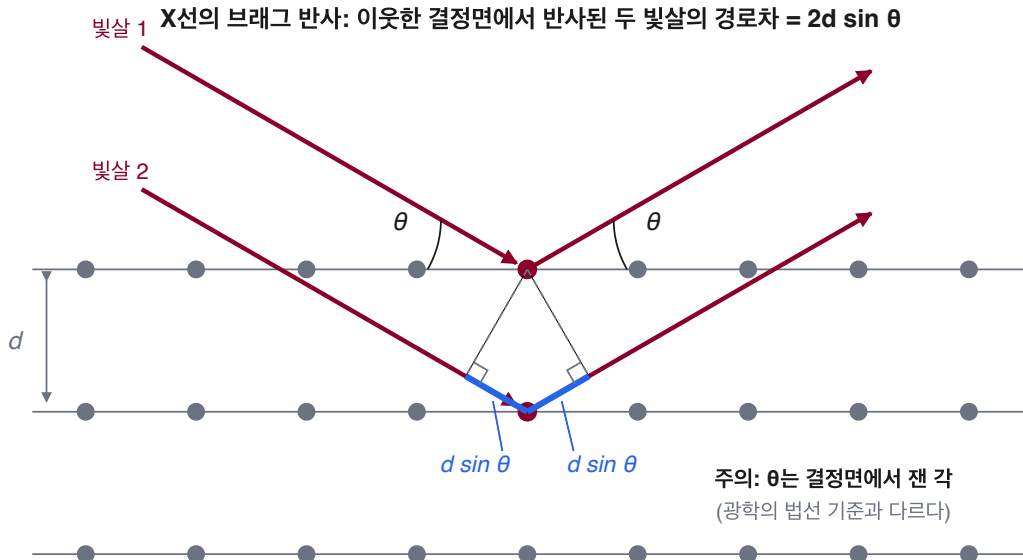
$$\theta = \sin^{-1} \frac{m\lambda}{d} = \sin^{-1} \frac{0.1}{3000} = 0.0019^\circ$$

중앙 극대에 파묻혀 측정이 불가능하다. $d \approx \lambda$ 인 격자가 필요한데, 원자 크기 간격의 눈금을 기계로 새길 수는 없다.

1912년 폰 라우에(von Laue)의 통찰: 결정(crystal)은 원자들이 약 0.1 nm 간격으로 규칙적으로 배열된, 자연이 만든 3차원 회절 격자다.

결정면과 브래그 반사

NaCl 같은 결정에서는 **단위 세포(unit cell)** 가 주기적으로 반복된다. X선이 들어가면 모든 원자에서 산란되는데, 그 결과는 마치 원자들을 지나가는 평행한 **반사면(결정면, crystal planes)** 들이 X선을 거울처럼 반사하는 것처럼 정리된다.



보강 간섭 조건 (브래그 법칙): $2d \sin \theta = m\lambda$ ($m = 1, 2, 3, \dots$)

- 면 간격(interplanar spacing)을 d 라 한다
- 각 θ 는 광학 관례와 달리 **면에서** 잴다 (법선 기준이 아니다!)

브래그 법칙의 유도

이웃한 두 면에서 반사된 빛살 1과 2를 비교하자. 그림의 두 직각삼각형에서, 빛살 2가 더 가는 거리는 들어올 때 $d \sin \theta$, 나갈 때 $d \sin \theta$:

$$\Delta L = 2d \sin \theta$$

두 빛살이 반사 후에도 같은 위상이 되려면(보강 간섭) 경로차가 파장의 정수배여야 한다:

$$2d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{브래그 법칙})$$

브래그(W. L. Bragg)가 유도했고, 아버지와 함께 1915년 노벨상을 받았다 (당시 25세, 물리학상 역대 최연소).

X선 회절로 무엇을 하는가

$$2d \sin \theta = m\lambda$$

한 결정 안에도 방향에 따라 **여러 가족의 결정면**이 있고, 각 가족은 자기만의 면 간격 d 를 갖는다. 예컨대 정사각 격자(한 변 a_0)의 한 기울어진 면 가족은 $d = a_0/\sqrt{20} = 0.2236 a_0$ 이다.

- **λ 를 알면** → 극대 각도 θ 에서 면 간격 d 와 단위 세포 구조를 알아낸다 (결정학)
- **d 를 알면** → 미지의 X선 파장 λ 를 측정한다 (X선 분광학)

DNA 이중나선(1953)도 로절린드 프랭클린의 X선 회절 사진에서 밝혀졌다. 오늘날 단백질 구조 결정의 표준 도구다.

Review & Summary

핵심 개념

- **회절** : 파동이 파장 크기의 틈·모서리를 만나 퍼지며 스스로 간섭하는 현상 — 좁은 슬릿일수록, 긴 파장일수록 크게 퍼진다
- **단일슬릿** : 구역 나누기(쌍쌍 상쇄)로 극소 위치, 위상차 호로 세기 공식을 얻는다
- **레일리 기준** : 회절이 모든 광학기기의 분해능을 제한한다 — 큰 개구, 짧은 파장이 유리
- **이중슬릿 회절** : 간섭 인자 $\times$ 회절 인자, d/a 가 살아남는 무늬 수를 결정
- **회절 격자** : 위치는 d 가, 선폭은 N 이 결정 — 분산 D 와 분해능 R 은 다른 능력
- **X선 회절** : 결정이 3차원 격자 — 브래그 법칙으로 원자 배열을 읽는다

핵심 공식

개념	공식
단일슬릿 극소	$a \sin \theta = m\lambda \quad (m = 1, 2, \dots)$
단일슬릿 세기	$I = I_m (\sin \alpha / \alpha)^2, \quad \alpha = (\pi a / \lambda) \sin \theta$
원형 개구·레일리	$\theta_R = 1.22 \lambda / d$
이중슬릿 회절	$I = I_m \cos^2 \beta (\sin \alpha / \alpha)^2, \quad \beta = (\pi d / \lambda) \sin \theta$
격자 극대·반쪽	$d \sin \theta = m\lambda, \quad \Delta\theta_{hw} = \lambda / (Nd \cos \theta)$
분산·분해능·브래그	$D = m / (d \cos \theta), \quad R = Nm, \quad 2d \sin \theta = m\lambda$

기억할 것:

- 단일슬릿에서 $m\lambda$ 는 **어두운** 무늬, 격자에서 $m\lambda$ 는 **밝은** 선 — 헛갈리지 말 것
- 슬릿을 좁히면 무늬는 넓어진다 ($\sin \theta_1 = \lambda / a$)
- 분해능이 아쉬우면: 개구는 키우고, 파장은 줄여라