

31장: 전자기 진동과 교류

Electromagnetic Oscillations and Alternating Current

이번 장에서 배울 내용

앞에서 축전기(C)는 전기장에, 인덕터(L)는 자기장에 에너지를 저장한다는 것을 배웠다. 이 둘을 연결하면 놀라운 일이 일어난다 — 에너지가 두 소자 사이를 **주기적으로 왕복** 한다.

- **LC 진동** : 전하와 전류가 사인형으로 진동한다 — 전기 진자
- **감쇠 진동** : 저항이 있으면 진동이 서서히 잦아든다
- **교류(alternating current)** 와 강제 진동, 그리고 **공명(resonance)**
- **전력과 rms** : 콘센트 "220 V"의 진짜 의미
- **변압기(transformer)** : 전압을 자유자재로 바꾸는 장치

우리는 교류 세상에 산다



- 발전소의 전기는 1초에 60번 진동하는 **교류** 다 (한국: $f = 60 \text{ Hz}$)
 - 송전선의 전압은 최대 765 kV — 왜 이렇게 높여서 보낼까?
 - 라디오·와이파이가 특정 채널만 골라 듣는 비결은 **공명** 이다
- 이 모든 질문의 답이 이번 장에 있다.

31.1 LC 진동

RC, RL 다음은 LC

지금까지 두 소자를 조합한 회로를 배웠다.

- **RC 회로** : 전하가 시간 상수 $\tau = RC$ 로 지수적으로 증가·감소
- **RL 회로** : 전류가 시간 상수 $\tau = L/R$ 로 지수적으로 증가·감소

남은 조합인 **LC 회로** 는 완전히 다르게 행동한다. 전하, 전류, 전위차가 지수적으로 변하는 대신 **사인형으로 진동(oscillate)** 한다. 축전기의 전기장과 인덕터의 자기장이 함께 진동하므로, 이를 **전자기 진동(electromagnetic oscillation)** 이라 한다.

두 개의 에너지 저장소

어느 순간 축전기의 전하가 q , 인덕터의 전류가 i 라면, 회로의 에너지는 두 곳에 저장되어 있다.

축전기의 전기장에 저장된 **전기 에너지** :

$$U_E = \frac{q^2}{2C}$$

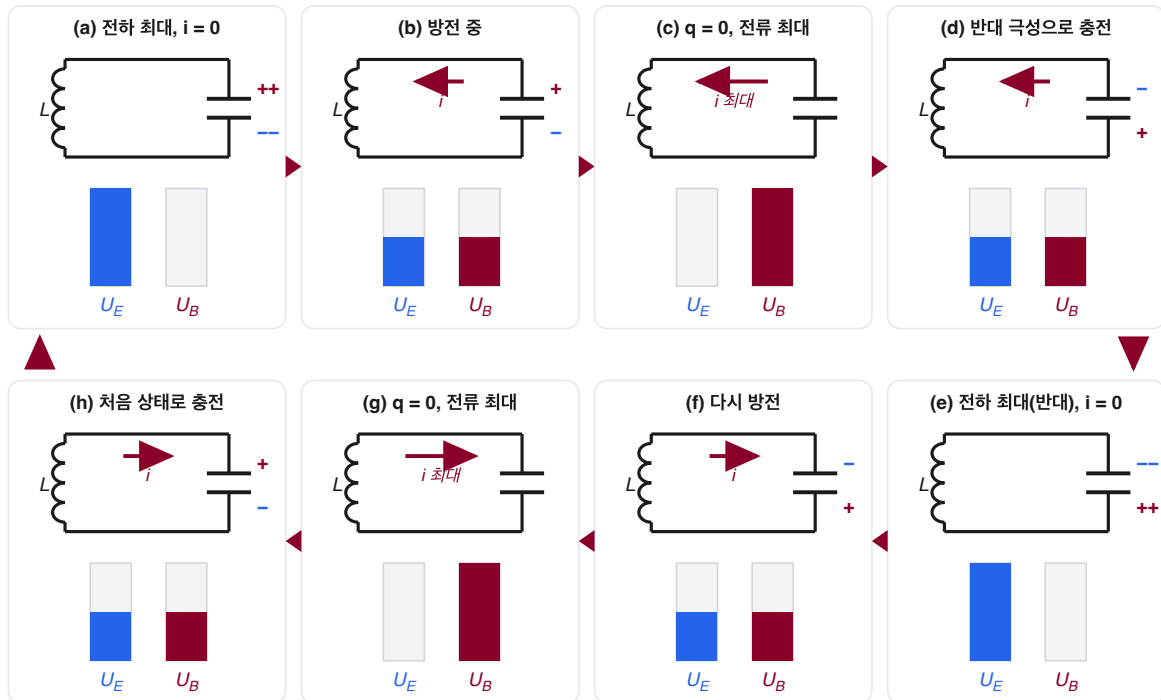
인덕터의 자기장에 저장된 **자기 에너지** :

$$U_B = \frac{Li^2}{2}$$

표기 약속: 진동하는 순간값은 소문자(q, i), 진폭(최댓값)은 대문자(Q, I)로 쓴다.

진동의 한 주기 — 여덟 단계

축전기를 최대 전하 Q 까지 충전해 놓고 시작하자 ($i = 0$).



에너지 막대를 보라. U_E 와 U_B 가 번갈아 커졌다 작아지지만, **총합은 항상 일정** 하다.

순환이 반복되는 이유

- (a) 축전기 전하 최대, 전류 0 → 에너지는 전부 전기장에
- (b) 축전기가 인덕터를 통해 방전 → 전류가 커지며 자기장에 에너지 이동
- (c) 전하 0, 전류 최대 → 에너지는 전부 자기장에
- (d) 인덕터는 전류의 급변을 허용하지 않으므로(30장) 전류가 계속 흘러 축전기를 **반대 극성으로** 충전
- (e) 반대 극성으로 전하 최대, 전류 0 → 다시 전부 전기장에
- (f)~(h) 같은 과정이 반대 방향으로 반복 → 처음 상태로 복귀

저항이 없으면 에너지 손실이 없으므로 이 진동은 **영원히 계속** 된다.

진동을 어떻게 관찰할까

축전기 양단의 전위차를 재면 전하를 알 수 있다.

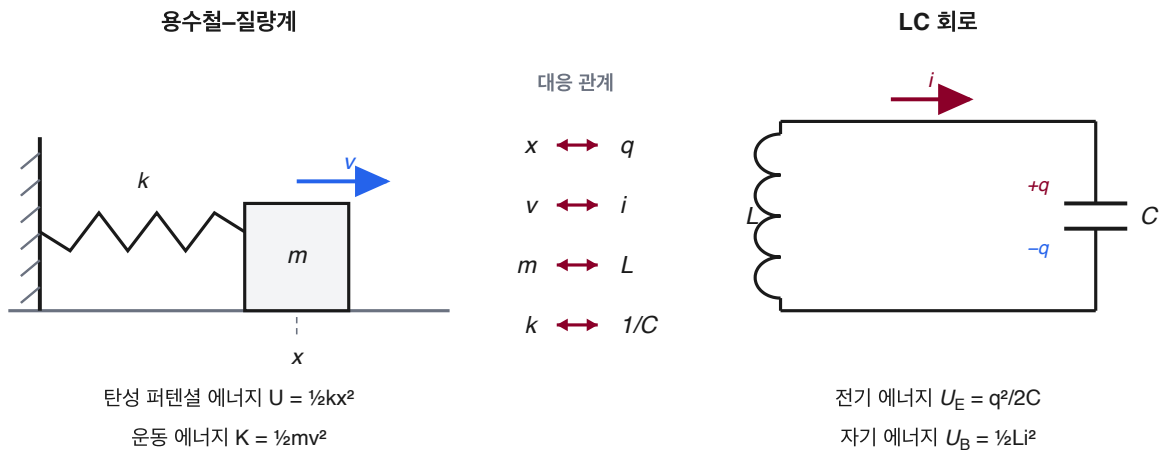
$$v_C = \left(\frac{1}{C} \right) q$$

전류는 회로에 작은 저항 R 을 넣고 그 양단 전위차 $v_R = iR$ 로 잰다. 오실로스코프로 보면 v_C 와 v_R 모두 사인형으로 진동한다.

실제 회로에는 항상 저항이 있어서 진동이 서서히 잦아든다 — 이는 31.2절에서 다룬다. 먼저 저항이 없는 이상적인 경우를 정확히 풀어 보자.

역학에서 본 적 있는 장면

이 에너지 왕복은 1학기에 배운 **블록-용수철 진동자** 와 똑같다.



$$\omega = \sqrt{k/m} \leftrightarrow \omega = 1/\sqrt{LC}$$

블록-용수철	LC 진동자
변위 x	전하 q
속도 $v = dx/dt$	전류 $i = dq/dt$
질량 m	인덕턴스 L
용수철 상수 k	$1/C$
운동 에너지 $\frac{1}{2}mv^2$	자기 에너지 $\frac{1}{2}Li^2$
퍼텐셜 에너지 $\frac{1}{2}kx^2$	전기 에너지 $q^2/2C$

대응 관계로 진동수 예측하기

에너지 식을 나란히 놓고 비교하면 대응이 보인다.

$$\frac{1}{2}kx^2 \leftrightarrow \frac{q^2}{2C}, \quad \frac{1}{2}mv^2 \leftrightarrow \frac{1}{2}Li^2$$

즉 $x \leftrightarrow q, v \leftrightarrow i, k \leftrightarrow 1/C, m \leftrightarrow L$ 이다. 축전기는 용수철처럼, 인덕터는 질량처럼 행동한다.

블록-용수철의 각진동수는 $\omega = \sqrt{k/m}$ 이었다. $k \rightarrow 1/C, m \rightarrow L$ 로 바꾸면:

$$\omega = \sqrt{\frac{1/C}{L}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

이 예측이 맞는지, 이제 미분방정식으로 정확히 확인하자.

준비 운동: 블록-용수철의 미분방정식

마찰이 없으면 총 에너지가 일정하다.

$$U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{const}$$

시간으로 미분하면 ($dU/dt = 0$):

$$\frac{dU}{dt} = mv \frac{dv}{dt} + kx \frac{dx}{dt} = 0$$

$v = dx/dt$, $dv/dt = d^2x/dt^2$ 를 대입하고 v 로 나누면:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

이 방정식의 해가 $x = X \cos(\omega t + \phi)$, $\omega = \sqrt{k/m}$ 이었다 (15장).

LC 회로의 미분방정식

저항이 없는 LC 회로의 총 에너지는:

$$U = U_B + U_E = \frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C}$$

에너지가 보존되므로 $dU/dt = 0$:

$$\frac{dU}{dt} = Li \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = 0$$

$i = dq/dt$, $di/dt = d^2q/dt^2$ 를 대입하고 공통 인수 i 를 소거하면:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C}q = 0$$

블록-용수철 방정식과 **수학적으로 완전히 같은 형태** 다.

해: 전하와 전류의 진동

같은 형태의 방정식은 같은 형태의 해를 갖는다. $x \rightarrow q$ 로 바꾸면:

$$q = Q \cos(\omega t + \phi)$$

Q 는 전하의 진폭(축전기의 최대 전하), ϕ 는 **위상 상수(phase constant)** 다. 전류는 미분해서 얻는다.

$$i = \frac{dq}{dt} = -\omega Q \sin(\omega t + \phi)$$

전류의 진폭을 $I = \omega Q$ 로 정의하면:

$$i = -I \sin(\omega t + \phi)$$

전하가 최대일 때 전류는 0, 전하가 0일 때 전류가 최대 $-$ 앞의 여덟 단계 그림과 정확히 일치한다.

각진동수 확인

$q = Q \cos(\omega t + \phi)$ 가 정말 해인지 대입해 확인하자. 두 번 미분하면:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = -\omega^2 Q \cos(\omega t + \phi)$$

미분방정식 $L d^2 q/dt^2 + q/C = 0$ 에 넣으면:

$$-L\omega^2 Q \cos(\omega t + \phi) + \frac{1}{C} Q \cos(\omega t + \phi) = 0$$

$Q \cos(\omega t + \phi)$ 를 소거하면 $L\omega^2 = 1/C$, 즉:

$$\boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{LC}$$

역학 대응으로 예측한 값과 정확히 같다.

위상 상수는 초기 조건이 정한다

ϕ 는 $t = 0$ 에 회로가 어떤 상태였는가로 결정된다.

- $t = 0$ 에 전하가 최대($q = Q, i = 0$)였다면 $\rightarrow \cos \phi = 1$ 이어야 하므로 $\phi = 0$
- $t = 0$ 에 전하가 0이고 전류가 최대였다면 $\rightarrow \phi = \pm 90^\circ$

L 이나 C 를 바꾸면 어떻게 될까?

- L 이 클수록, C 가 클수록 $\omega = 1/\sqrt{LC}$ 는 **작아진다** (느린 진동)
- 무거운 질량($m \leftrightarrow L$), 약한 용수철($k \leftrightarrow 1/C$)이 느리게 진동하는 것과 같다

에너지도 진동한다

해를 에너지 식에 대입하자 ($\omega^2 = 1/LC$ 사용).

$$U_E = \frac{q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C} \cos^2(\omega t + \phi)$$

$$U_B = \frac{Li^2}{2} = \frac{L\omega^2 Q^2}{2} \sin^2(\omega t + \phi) = \frac{Q^2}{2C} \sin^2(\omega t + \phi)$$

두 식을 더하면 $\cos^2 + \sin^2 = 1$ 이므로:

$$U = U_E + U_B = \frac{Q^2}{2C} = \text{const}$$

에너지 그래프에서 읽을 것 세 가지

$U_E(t)$ 와 $U_B(t)$ 의 그래프를 보면:

1. 두 에너지의 최대값은 둘 다 $Q^2/2C$ 이다
2. 어느 순간에도 합은 $Q^2/2C$ 로 **일정** 하다
3. U_E 가 최대일 때 $U_B = 0$ 이고, 그 반대도 성립한다

에너지는 $\cos^2$, $\sin^2$ 으로 진동하므로 진동수가 2ω 이다 — 한 주기 T 동안 전기 에너지가 두 번 최대가 된다 (전하가 $+Q$ 일 때와 $-Q$ 일 때).

예제: LC 진동자의 전위차

$1.5\ \mu\text{F}$ 축전기를 $57\ \text{V}$ 로 충전한 뒤 전지를 떼고, $t = 0$ 에 $12\ \text{mH}$ 코일과 연결해 LC 진동자를 만들었다. 인덕터 양단의 전위차 $v_L(t)$ 를 구하라.

루프 규칙에 의해 회로를 한 바퀴 돈 전위차 합은 0이므로, 언제나 $v_L = v_C$ 이다.

$t = 0$ 에 전하가 최대이므로 $\phi = 0$, 즉 $q = Q \cos \omega t$ 이고 $v_C = q/C = V_C \cos \omega t$ 이다. 각 진동수는:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(0.012)(1.5 \times 10^{-6})}} = 7454 \approx 7500\ \text{rad/s}$$

V_C 는 처음 충전 전압 $57\ \text{V}$ 이므로:

$$v_L = v_C = (57\ \text{V}) \cos(7500\ \text{rad/s} \times t)$$

예제 계속: 전류의 최대 변화율

같은 회로에서 전류가 변하는 최대 비율 $(di/dt)_{\max}$ 는?

$\phi = 0$ 이므로 $i = -\omega Q \sin \omega t$ 이고, 미분하면:

$$\frac{di}{dt} = -\omega^2 Q \cos \omega t \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{di}{dt}\right)_{\max} = \omega^2 Q$$

$Q = CV_C$ 와 $\omega^2 = 1/LC$ 를 대입하면 깔끔하게 정리된다.

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{\max} = \frac{1}{LC} CV_C = \frac{V_C}{L} = \frac{57 \text{ V}}{0.012 \text{ H}} = 4750 \approx 4800 \text{ A/s}$$

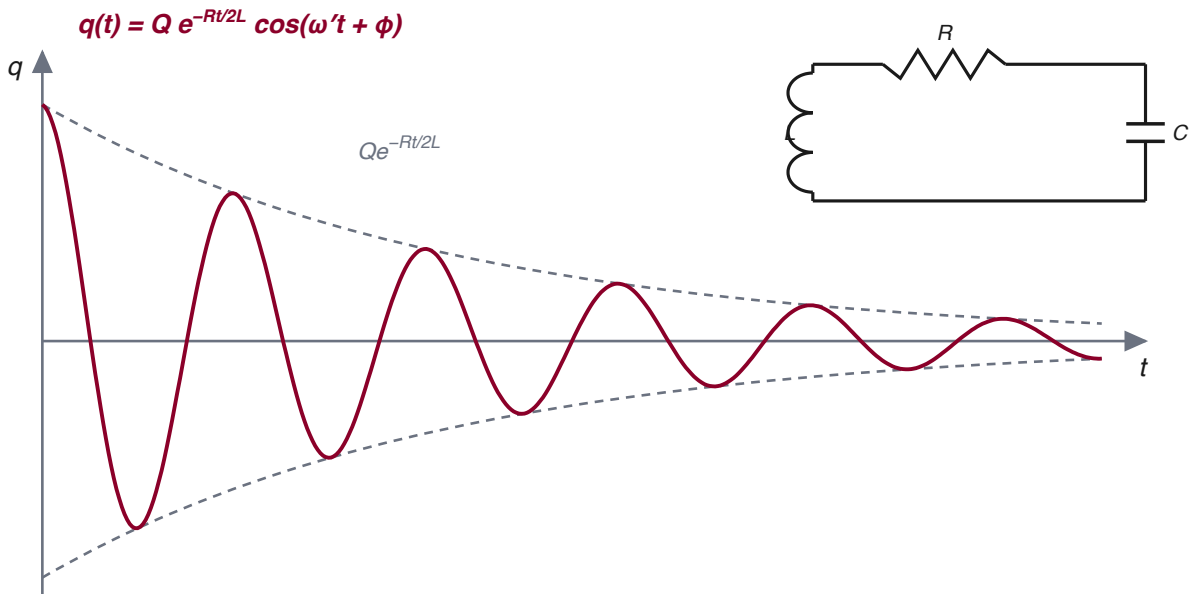
이 순간은 전류가 0이고 전하가 최대인 순간 — 인덕터에 걸린 전압이 최대라서 전류가 가장 빠르게 변한다.

시뮬레이션: LC 진동과 직렬 RLC 교류 — 모드 1에서 L·C를 바꾸며 에너지 교환 관찰, 모드 2는
31.4절 공명 탐색용

31.2 RLC 회로의 감쇠 진동

저항이 있으면 진동이 잦아든다

실제 회로에는 저항이 있다. 저항 R 을 직렬로 넣은 **RLC 회로**에서는 전자기 에너지가 저항에서 열로 빠져나간다.



저항 R 가 에너지를 열로 빼앗아 진폭이 지속적으로 줄어든다

진폭이 점점 줄어드는 이런 진동을 **감쇠 진동(damped oscillation)** 이라 한다. 마찰이 있는 블록-용수철 진동자와 똑같은 상황이다.

감쇠 진동의 미분방정식

총 전자기 에너지는 여전히 $U = Li^2/2 + q^2/2C$ 이지만, 이제 일정하지 않다. 저항에서 열이 발생하는 비율만큼 줄어든다.

$$\frac{dU}{dt} = -i^2 R$$

좌변을 미분하면:

$$Li \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = -i^2 R$$

$i = dq/dt$, $di/dt = d^2q/dt^2$ 를 대입하고 공통 인수 i 로 나누면:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0$$

해: 지수적으로 줄어드는 사인 진동

이 방정식의 해는 (감쇠 블록-용수철과 같은 형태):

$$q = Qe^{-Rt/2L} \cos(\omega't + \phi), \quad \omega' = \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

- 진폭이 $Qe^{-Rt/2L}$ 로 **지수적으로 감쇠** 한다 — 그래프의 점선 포락선
- 감쇠 진동수 ω' 는 $\omega = 1/\sqrt{LC}$ 보다 약간 작지만, R 이 작으면 $\omega' \approx \omega$ 로 근사한다

전기 에너지의 변화도 구할 수 있다. q 를 대입하면:

$$U_E = \frac{q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C} e^{-Rt/L} \cos^2(\omega't + \phi)$$

에너지 진폭은 $e^{-Rt/L}$ 로 감쇠한다 (전하 진폭 감쇠의 제곱).

간단 계산: 진폭이 절반이 되는 시간

$L = 12 \text{ mH}$, $C = 1.6 \mu\text{F}$, $R = 1.5 \Omega$ 인 RLC 회로. 전하 진폭이 처음의 50%가 되는 시각은?

$$e^{-Rt/2L} = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{2L}{R} \ln 2 = \frac{(2)(0.012)}{1.5} (0.693) = 0.0111 \text{ s} \approx 11 \text{ ms}$$

이 시간 동안 진동은 몇 번 일어날까? 주기는:

$$T = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi\sqrt{(0.012)(1.6 \times 10^{-6})} = 8.7 \times 10^{-4} \text{ s}$$

$$N = \frac{0.0111}{8.7 \times 10^{-4}} \approx 13 \text{ 회}$$

진폭이 반으로 줄기까지 13번이나 진동한다 — R 이 작아 감쇠가 느린 경우다.

31.3 세 가지 기본 회로의 강제 진동

교류란 무엇인가

감쇠를 이기고 진동을 유지하려면 외부에서 에너지를 계속 공급해야 한다. 발전소의 **교류 발전기 (ac generator)** 가 그 역할을 한다. 자기장 속에서 코일을 돌리면 (30장 패러데이 법칙) 사인형 **기전력(emf)** 이 유도된다.

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin \omega_d t$$

- $\mathcal{E}_m$: 기전력의 진폭, ω_d : **구동 각진동수(driving angular frequency)**
- 한국의 전력망: $f_d = 60 \text{ Hz}$, 즉 $\omega_d = 2\pi f_d \approx 377 \text{ rad/s}$
- 이 기전력이 만드는 전류가 **교류(alternating current, ac)** 다. 전지가 만드는 한 방향 전류는 **직류(direct current, dc)**

회로에 흐르는 전류는 일반적으로 기전력과 위상이 어긋날 수 있으므로 다음과 같이 쓴다.

$$i = I \sin(\omega_d t - \phi)$$

전자는 제자리에서 떨고 있을 뿐

교류에서는 전류가 $\frac{1}{120}$ 초마다 방향을 바꾼다. 전선 속 전도 전자의 유동 속력은 겨우 4×10^{-5} m/s 정도이므로, 반 주기 동안 전자가 움직이는 거리는:

$$d \approx (4 \times 10^{-5} \text{ m/s}) \left(\frac{1}{120} \text{ s} \right) \approx 3 \times 10^{-7} \text{ m}$$

원자 10개 정도의 거리다! 발전소의 전자가 우리 집까지 "배달"되는 것이 결코 아니다.

- 전류란 단면을 지나는 전하의 비율일 뿐 — 전자가 멀리 갈 필요가 없다
- 방향을 바꾸라는 신호(전자기장)는 거의 빛의 속력으로 전선을 따라 전파된다
- 전구나 토스터에는 전자가 왕복하며 충돌로 에너지만 전달하면 충분하다

왜 하필 교류인가

교류의 결정적 장점: **전류가 진동하면 그 주위의 자기장도 진동한다.**

- 진동하는 자기장 → 패러데이 유도 법칙 사용 가능 → **변압기**로 전압을 자유롭게 올리고 내릴 수 있다 (31.6절)
- 송전은 초고압으로 (손실 최소), 사용은 저압으로 (안전) — 직류로는 어려운 일
- 회전하는 발전기·전동기와 자연스럽게 맞물린다

자유 진동과 강제 진동

- **자유 진동(free oscillation)** : 외부 기전력 없이 진동하는 LC, RLC 회로는 **고유 각진동수 (natural angular frequency)** $\omega = 1/\sqrt{LC}$ 로 진동한다
- **강제 진동(forced/driven oscillation)** : 외부 기전력 $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin \omega_d t$ 를 연결하면, 회로는 고유 진동수와 무관하게 **반드시 구동 진동수 ω_d 로** 진동한다

그런데 전류의 **진폭 I** 는 ω_d 가 ω 에 얼마나 가까운가에 크게 의존한다. $\omega_d = \omega$ 일 때 I 가 최대가 되는데, 이것이 **공명(resonance)** 이다 (31.4절).

먼저 R, C, L을 하나씩 따로 교류 전원에 연결해 보자.

저항 부하: 위상이 같다

저항 R 만 교류 전원에 연결하자. 루프 규칙에서 $\mathcal{E} - v_R = 0$ 이므로:

$$v_R = \mathcal{E}_m \sin \omega_d t = V_R \sin \omega_d t$$

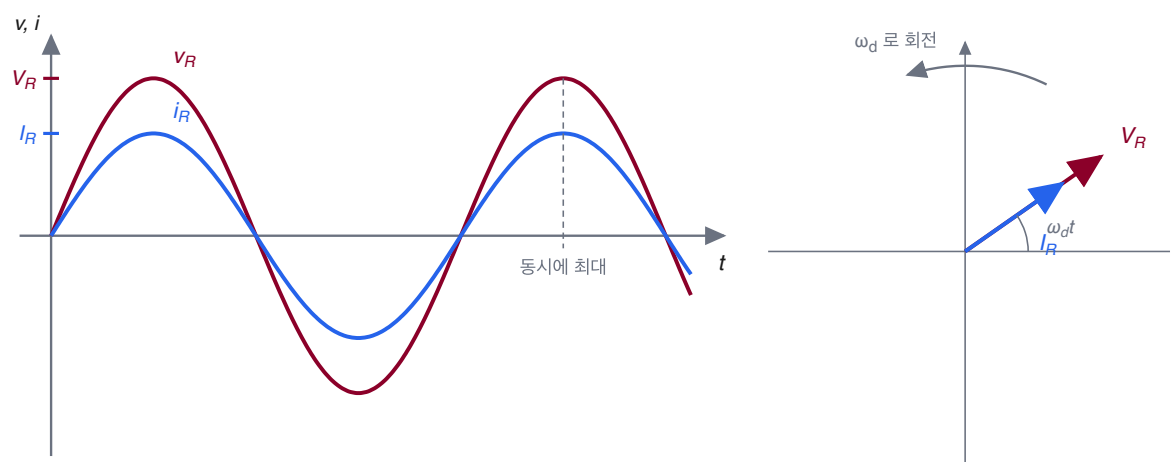
저항의 정의 $i = v/R$ 에서:

$$i_R = \frac{v_R}{R} = \frac{V_R}{R} \sin \omega_d t$$

$i = I \sin(\omega_d t - \phi)$ 와 비교하면 $\phi = 0$ — 전류와 전압이 **같은 위상(in phase)** 이다. 진폭 관계는:

$$\boxed{V_R = I_R R} \quad (\phi = 0)$$

저항 부하: 그래프와 위상자



저항: 전류와 전압이 같은 위상 ($\phi = 0$)

v_R 와 i_R 는 동시에 최대, 동시에 0이 된다.

위상자: 회전 벡터로 보는 교류

교류량은 **위상자(phasor)** 라는 회전 벡터로 나타내면 편리하다.

- **각속도** : 모든 위상자는 원점 둘레를 반시계 방향으로 각속도 ω_d 로 회전한다
- **길이** : 위상자의 길이 = 그 교류량의 **진폭** (V_R, I_R)
- **투영** : 세로축 투영 = 그 순간의 **순간값** (v_R, i_R)
- **회전각** : 회전각 = 그 순간의 **위상** ($\omega_d t - \phi$)

두 위상자 사이의 각도가 곧 **위상차** 다. 저항에서는 V_R 와 I_R 위상자가 겹쳐서 함께 돈다 ($\phi = 0$).

축전기 부하: 유도

축전기 C 만 연결하면 $v_C = V_C \sin \omega_d t$ 이고, $q = C v_C$ 이므로:

$$q_C = C V_C \sin \omega_d t$$

전류는 전하의 시간 미분이다.

$$i_C = \frac{dq_C}{dt} = \omega_d C V_C \cos \omega_d t$$

여기서 **용량 리액턴스(capacitive reactance)**를 정의한다 (단위: Ω).

$$X_C = \frac{1}{\omega_d C}$$

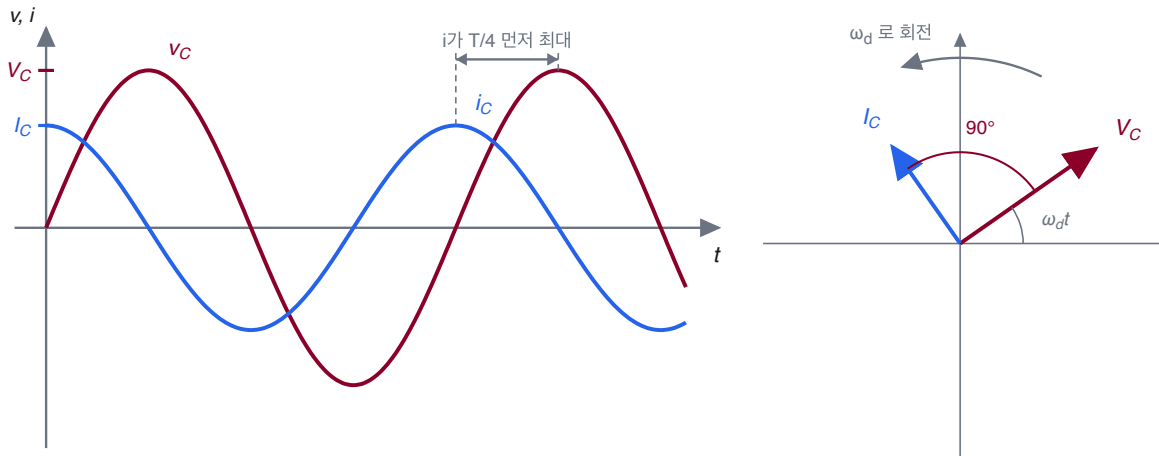
$\cos \omega_d t = \sin(\omega_d t + 90^\circ)$ 를 쓰면:

$$i_C = \frac{V_C}{X_C} \sin(\omega_d t + 90^\circ)$$

축전기 부하: 전류가 90° 앞선다

$i = I \sin(\omega_d t - \phi)$ 와 비교하면 $\phi = -90^\circ$ 이고, 진폭 관계는:

$$\boxed{V_C = I_C X_C} \quad (\phi = -90^\circ)$$



축전기: 전류가 전압보다 90° ($T/4$) 앞선다 — ICE, $\phi = -90^\circ$

전류 i_C 가 전압 v_C 보다 **한 주기의 1/4 먼저** 최대가 된다 — 전류가 전압을 **앞선다(lead)**.

직관: 축전기는 전하가 쌓여야 전압이 생긴다. 전류(전하의 흐름)가 먼저 있어야 전압이 뒤따른다.

축전기 부하: 숫자 확인

$C = 15.0 \mu\text{F}$ 를 진폭 $\mathcal{E}_m = 36.0 \text{ V}$, $f_d = 60.0 \text{ Hz}$ 인 교류 전원에 연결했다.

용량 리액턴스는:

$$X_C = \frac{1}{2\pi f_d C} = \frac{1}{(2\pi)(60.0)(15.0 \times 10^{-6})} = 177 \Omega$$

축전기만 있으므로 $V_C = \mathcal{E}_m = 36.0 \text{ V}$ 이고, 전류 진폭은:

$$I_C = \frac{V_C}{X_C} = \frac{36.0 \text{ V}}{177 \Omega} = 0.203 \text{ A}$$

주파수를 올리면? $X_C = 1/\omega_d C$ 가 작아져 전류가 커진다 — 축전기는 **고주파를 잘 통과** 시킨다.

인덕터 부하: 유도

인덕터 L 만 연결하면 $v_L = V_L \sin \omega_d t$ 이고, 인덕터의 기본 관계는 $v_L = L di_L/dt$ 이므로:

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{V_L}{L} \sin \omega_d t$$

전류를 얻으려면 적분한다.

$$i_L = \int di_L = \frac{V_L}{L} \int \sin \omega_d t dt = -\frac{V_L}{\omega_d L} \cos \omega_d t$$

유도 리액턴스(inductive reactance)를 정의하면 (단위: Ω):

$$\boxed{X_L = \omega_d L}$$

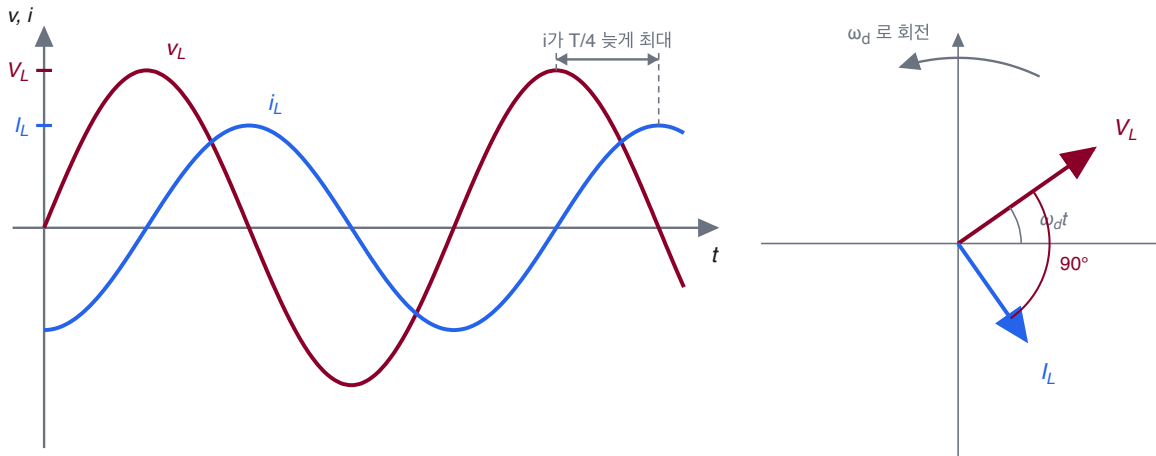
$-\cos \omega_d t = \sin(\omega_d t - 90^\circ)$ 를 쓰면:

$$i_L = \frac{V_L}{X_L} \sin(\omega_d t - 90^\circ)$$

인덕터 부하: 전류가 90° 뒤진다

$i = I \sin(\omega_d t - \phi)$ 와 비교하면 $\phi = +90^\circ$ 이고, 진폭 관계는:

$$\boxed{V_L = I_L X_L} \quad (\phi = +90^\circ)$$



인덕터: 전류가 전압보다 90° ($T/4$) 뒤진다 — ELI, $\phi = +90^\circ$

전류 i_L 가 전압 v_L 보다 **한 주기의 1/4 늦게** 최대가 된다 — 전류가 전압에 **뒤진다(lag)**.

직관: 인덕터는 전류 변화에 저항하는 역기전력을 만들므로 (렌츠 법칙) 전류가 전압을 바로 따라가지 못한다.

인덕터 부하: 숫자 확인

$L = 230 \text{ mH}$ 를 진폭 $\mathcal{E}_m = 36.0 \text{ V}$, $f_d = 60.0 \text{ Hz}$ 인 교류 전원에 연결했다.

유도 리액턴스는:

$$X_L = 2\pi f_d L = (2\pi)(60.0)(230 \times 10^{-3}) = 86.7 \, \Omega$$

$V_L = \mathcal{E}_m = 36.0 \text{ V}$ 이므로 전류 진폭은:

$$I_L = \frac{V_L}{X_L} = \frac{36.0 \text{ V}}{86.7 \, \Omega} = 0.415 \text{ A}$$

주파수를 올리면? $X_L = \omega_d L$ 이 커져 전류가 작아진다 — 인덕터는 **고주파를 막는다**. 축전기와 정반대다.

암기법: ELI the ICE man

소자	저항/리액턴스	전류의 위상	위상 상수 ϕ	진폭 관계
저항 R	R	v_R 와 같은 위상	0°	$V_R = I_R R$
축전기 C	$X_C = 1/\omega_d C$	v_C 보다 90° 앞섬	-90°	$V_C = I_C X_C$
인덕터 L	$X_L = \omega_d L$	v_L 보다 90° 뒤짐	$+90^\circ$	$V_L = I_L X_L$

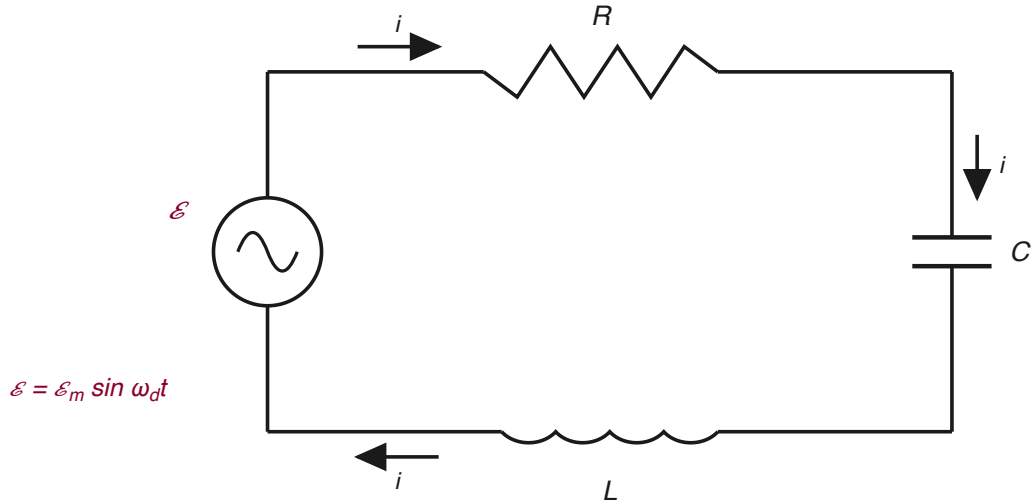
- **ELI** : 인덕터(**L**)에서는 기전력(**E**)이 전류(**I**)보다 앞선다 $\rightarrow \phi = +90^\circ$
- **ICE** : 축전기(**C**)에서는 전류(**I**)가 기전력(**E**)보다 앞선다 $\rightarrow \phi = -90^\circ$

X_C 가 $\omega_d C$ 인지 $1/\omega_d C$ 인지 헷갈리면 — " C 는 지하실(cellar)에", 즉 분모에 있다고 기억하자.

31.4 직렬 RLC 회로

이제 셋을 한꺼번에

R, L, C를 모두 직렬로 연결하고 교류 기전력 $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin \omega_d t$ 로 구동하자.



직렬이므로 세 소자에 **같은 전류**가 흐른다.

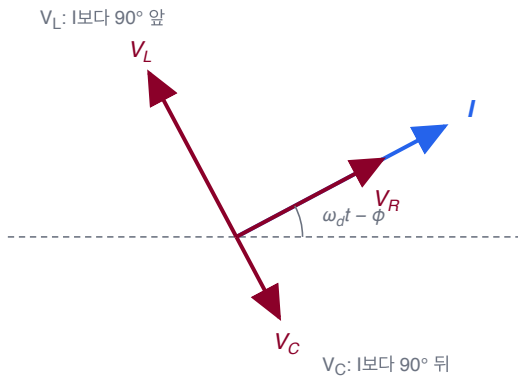
$$i = I \sin(\omega_d t - \phi)$$

목표: 진폭 I 와 위상 상수 ϕ 를 $\mathcal{E}_m, \omega_d, R, L, C$ 로 나타내는 것. 위상자 그림이 결정적인 도구가 된다.

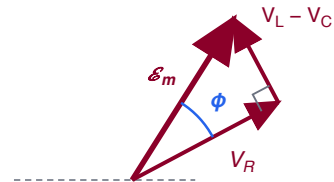
위상자로 전압 합성하기

전류 위상자 I 를 기준으로 세 전압 위상자를 그린다 (앞 절의 결과).

(a) 전압 위상자들



(b) 벡터 합 → 직각삼각형



$$\mathcal{E}_m^2 = V_R^2 + (V_L - V_C)^2$$

- V_R : 전류와 **같은 방향** (같은 위상)
- V_L : 전류보다 90° **앞** (반시계 쪽)
- V_C : 전류보다 90° **뒤**

루프 규칙에 의해 매 순간 $\mathcal{E} = v_R + v_C + v_L$ 이므로, 기전력 위상자 $\mathcal{E}_m$ 은 세 전압 위상자의 **벡터 합** 이어야 한다.

전류 진폭과 임피던스

V_L 과 V_C 는 정반대 방향이므로 먼저 합쳐 $V_L - V_C$ 하나로 만든다. 남은 직각삼각형에 피타고라스 정리를 쓰면:

$$\mathcal{E}_m^2 = V_R^2 + (V_L - V_C)^2$$

$V_R = IR, V_L = IX_L, V_C = IX_C$ 를 대입하면:

$$\mathcal{E}_m^2 = (IR)^2 + (IX_L - IX_C)^2 = I^2 [R^2 + (X_L - X_C)^2]$$

I 에 대해 풀면:

$$I = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{\mathcal{E}_m}{Z}$$

분모가 회로의 **임피던스(impedance)** 다: $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ (단위: Ω).

위상 상수

위상자 직각삼각형에서 ϕ 는 $\mathcal{E}_m$ 과 V_R 사이의 각이므로:

$$\tan \phi = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{IX_L - IX_C}{IR}$$

$$\tan \phi = \frac{X_L - X_C}{R}$$

세 가지 경우로 나뉜다.

조건	회로 성격	위상	암기
$X_L > X_C$	유도성(inductive)	$\phi > 0$, 전류가 뒤짐	ELI
$X_C > X_L$	용량성(capacitive)	$\phi < 0$, 전류가 앞섬	ICE
$X_L = X_C$	공명(resonance)	$\phi = 0$, 같은 위상	—

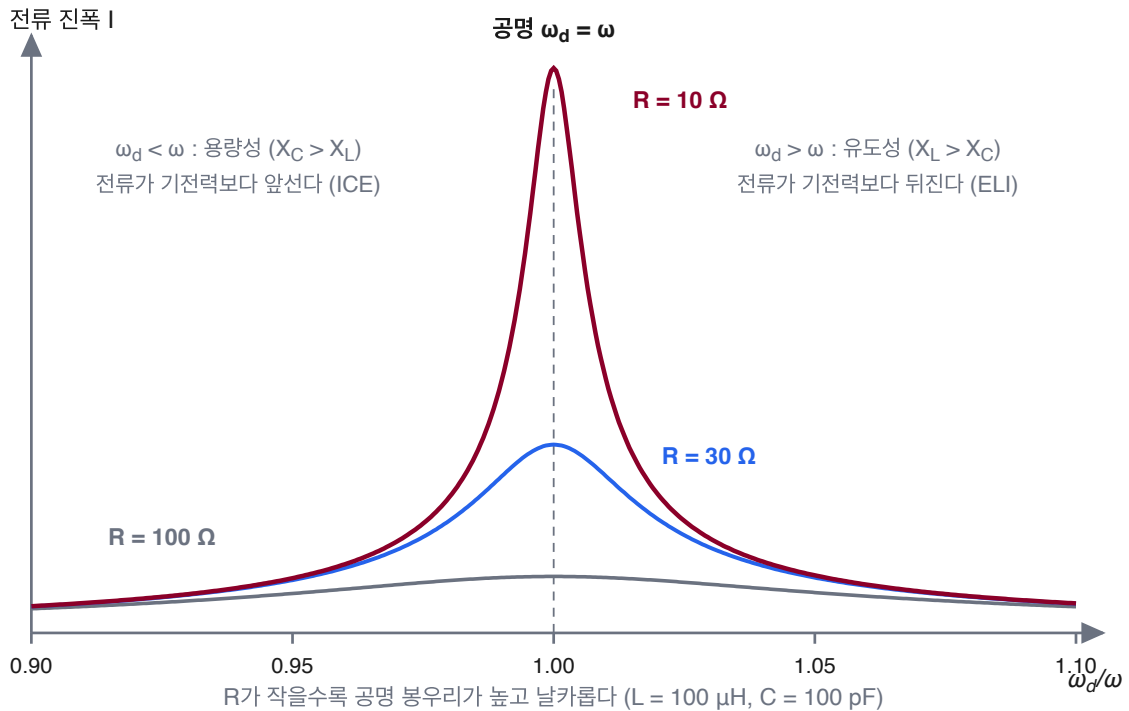
극한 확인: 순수 인덕터 회로($X_C = R = 0$)는 $\phi = +90^\circ$, 순수 축전기 회로($X_L = R = 0$)는 $\phi = -90^\circ$ — 31.3절 결과와 일치한다.

공명

전류 진폭 $I = \mathcal{E}_m / \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ 는 $X_L - X_C = 0$ 일 때 최대가 된다.

$$\omega_d L = \frac{1}{\omega_d C} \Rightarrow \boxed{\omega_d = \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad (\text{공명})$$

구동 진동수가 회로의 **고유 진동수와 일치** 할 때 전류가 최대 $I = \mathcal{E}_m / R$ 이 된다. 그네를 고유 진동수에 맞춰 밀어야 크게 흔들리는 것과 같은 원리다.



R 가 작을수록 봉우리가 높고 날카롭다. 봉우리 왼쪽($\omega_d < \omega$)은 용량성(ICE), 오른쪽($\omega_d > \omega$)은 유도성(ELI) 영역이다.

공명 곡선의 물리

ω_d 를 낮은 값에서부터 서서히 올리면:

- 낮은 ω_d : $X_C = 1/\omega_d C$ 가 매우 크다 $\rightarrow$ 용량성 지배, 전류 작음
- ω_d 증가 $\rightarrow X_C$ 감소, $X_L = \omega_d L$ 증가 $\rightarrow$ 임피던스가 줄어 전류 증가
- $\omega_d = \omega$: $X_C = X_L$ 이 상쇄되어 $Z = R$ (최소) $\rightarrow$ 전류 최대
- 더 올리면 X_L 이 지배 $\rightarrow$ 유도성, 전류 다시 감소

실생활 응용 — 라디오 튜닝: 방송국마다 다른 주파수의 전파가 안테나에 도달하지만, 수신 회로의 C 를 조절해 공명 진동수를 원하는 방송 주파수에 맞추면 그 신호만 큰 전류로 증폭된다. 앞의 시뮬레이션 **모드 2**에서 ω_d 슬라이더로 공명을 직접 찾아보자.

예제: 직렬 RLC 회로의 전류와 위상

$R = 200\ \Omega$, $C = 15.0\ \mu\text{F}$, $L = 230\ \text{mH}$, $f_d = 60.0\ \text{Hz}$, $\mathcal{E}_m = 36.0\ \text{V}$ 인 직렬 RLC 회로가 있다. (a) 전류 진폭 I 는?

앞에서 구한 리액턴스를 그대로 쓴다: $X_C = 177\ \Omega$, $X_L = 86.7\ \Omega$.

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{(200)^2 + (86.7 - 177)^2} = 219\ \Omega$$

$$I = \frac{\mathcal{E}_m}{Z} = \frac{36.0\ \text{V}}{219\ \Omega} = 0.164\ \text{A}$$

예제 계속: 위상 상수

(b) 위상 상수 ϕ 는?

$$\phi = \tan^{-1} \frac{X_L - X_C}{R} = \tan^{-1} \frac{86.7 \, \Omega - 177 \, \Omega}{200 \, \Omega} = -24.3^\circ$$

- $\phi < 0 : X_C > X_L$ 이므로 **용량성** 회로 — 전류가 기전력보다 앞선다 (ICE)
- 만약 공명으로 만들고 싶다면? X_C 를 줄여야 하므로 C 를 **키워야** 한다 ($X_C = 1/\omega_d C$)

계산기 주의: $\tan^{-1}$ 는 항상 $-90^\circ \sim +90^\circ$ 값을 주므로 부호를 그대로 믿으면 된다. 다만 전류가 앞서는지 뒤지는지는 항상 X_L 과 X_C 의 대소로 확인하는 습관을 들이자.

31.5 교류 회로의 전력

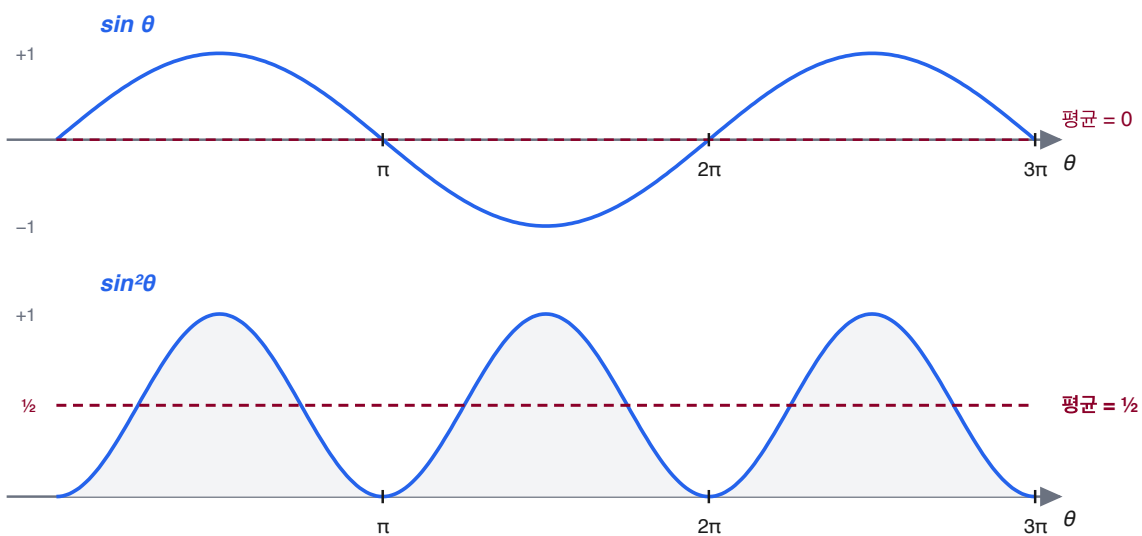
순간 전력과 평균 전력

직렬 RLC 회로에서 축전기·인덕터의 저장 에너지는 정상 상태에서 평균적으로 일정하다. 발전기가 공급하는 에너지는 결국 모두 **저항에서 열로** 소모된다. 저항에서 소모되는 순간 전력은:

$$P = i^2 R = [I \sin(\omega_d t - \phi)]^2 R = I^2 R \sin^2(\omega_d t - \phi)$$

시간 평균이 필요하다. $\sin^2$ 의 한 주기 평균은 $\frac{1}{2}$ 이므로:

$$P_{\text{avg}} = \frac{I^2 R}{2} = \left(\frac{I}{\sqrt{2}} \right)^2 R$$



rms — 제공 평균 제공근

$I/\sqrt{2}$ 를 전류의 **rms 값(root-mean-square)** 이라 한다. 제공해서(s) 평균 내고(m) 제공근(r)을 취한 값이다.

$$I_{\text{rms}} = \frac{I}{\sqrt{2}}, \quad V_{\text{rms}} = \frac{V}{\sqrt{2}}, \quad \mathcal{E}_{\text{rms}} = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{2}}$$

$$P_{\text{avg}} = I_{\text{rms}}^2 R$$

rms를 쓰면 교류 전력 공식이 직류 공식($P = i^2 R$)과 같은 모양이 된다. 그래서 교류 계기(전압계·전류계)는 모두 rms 값을 표시하도록 만든다.

콘센트의 220 V는 rms 값이다. 실제 전압의 최댓값은:

$$V_{\text{max}} = \sqrt{2} \times 220 \text{ V} \approx 311 \text{ V}$$

평균 전력과 역률

$I_{\text{rms}} = \mathcal{E}_{\text{rms}}/Z$ 를 이용해 $P_{\text{avg}} = I_{\text{rms}}^2 R$ 를 다시 쓰면:

$$P_{\text{avg}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{rms}}}{Z} I_{\text{rms}} R = \mathcal{E}_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \frac{R}{Z}$$

위상자 삼각형에서 R/Z 는 위상 상수의 코사인이다.

$$\cos \phi = \frac{V_R}{\mathcal{E}_m} = \frac{IR}{IZ} = \frac{R}{Z}$$

$$\boxed{P_{\text{avg}} = \mathcal{E}_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos \phi}$$

$\cos \phi$ 를 **역률(power factor)** 이라 한다. $\cos \phi = \cos(-\phi)$ 이므로 유도성이든 용량성이든 결과는 같다.

역률은 왜 중요한가

같은 rms 전류를 흘려도 $\cos \phi$ 가 작으면 실제 전달되는 전력이 작다 — 전류는 왔다 갔다 하는데 일은 안 하는 셈이다.

- 전력 회사는 $\cos \phi$ 를 1에 가깝게 (즉 $\phi \approx 0$, 공명 조건에 가깝게) 유지하려 한다
- 전동기가 많은 공장은 회로가 **유도성** (X_L 큼) $\rightarrow$ 직렬로 축전기를 추가하면 $X_L - X_C$ 가 줄어 역률이 개선된다
- 실제로 한국전력은 역률이 낮은 산업체에 추가 요금을 부과한다 — 역률 보상용 콘덴서를 설치하는 이유

예제: 역률과 평균 전력

$\mathcal{E}_{\text{rms}} = 120 \text{ V}$, $f_d = 60.0 \text{ Hz}$ 로 구동되는 직렬 RLC 회로: $R = 200 \Omega$, $X_L = 80.0 \Omega$, $X_C = 150 \Omega$. (a) 역률은?

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{(200)^2 + (80.0 - 150)^2} = 211.9 \Omega$$

$$\cos \phi = \frac{R}{Z} = \frac{200 \Omega}{211.9 \Omega} = 0.944$$

$\phi = \pm 19.3^\circ$ 중 어느 쪽일까? $X_C > X_L$ 이므로 용량성 회로 $\rightarrow$ 전류가 앞선다 $\rightarrow \phi = -19.3^\circ$.

(b) 저항에서 소모되는 평균 전력은?

$$P_{\text{avg}} = \mathcal{E}_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos \phi = \frac{\mathcal{E}_{\text{rms}}^2}{Z} \cos \phi = \frac{(120)^2}{211.9} (0.944) = 64.1 \text{ W}$$

예제 계속: 전력을 최대로 만들기

(c) 다른 조건은 그대로 두고 C 만 바꿔 P_{avg} 를 최대로 만들려면 새 전기용량 C_{new} 는?

전력이 최대가 되려면 **공명** 이어야 한다: $X_C = X_L = 80.0 \, \Omega$. 지금은 $X_C = 150 \, \Omega > X_L$ 이므로 X_C 를 줄여야 하고, $X_C = 1/\omega_d C$ 이므로 C 를 키워야 한다.

$$\frac{1}{2\pi f_d C_{\text{new}}} = X_L \Rightarrow C_{\text{new}} = \frac{1}{2\pi(60.0)(80.0)} = 33.2 \, \mu\text{F}$$

이때 $Z = R$ 이고 $\cos \phi = 1$ 이므로 최대 평균 전력은:

$$P_{\text{avg,max}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{rms}}^2}{R} = \frac{(120)^2}{200} = 72.0 \, \text{W}$$

31.6 변압기

송전의 딜레마: 전압이나 전류냐

역률이 1인 저항 부하에 대해 (rms 값으로) $P_{\text{avg}} = \mathcal{E}I = IV$ 이다. 같은 전력을 보내는 데 I 와 V 의 조합은 자유롭다. 어느 쪽이 좋을까?

송전선 자체의 저항 R 에서 열로 새는 전력은 $P_{\text{loss}} = I^2 R$ — **전류의 제곱** 에 비례한다. 따라서 **전류는 최대한 작게, 전압은 최대한 높게** 보내야 한다.

숫자로 확인하자. 저항 $220\ \Omega$ 인 1000 km 송전선으로 735 kV, 500 A를 보내면:

$$P_{\text{avg}} = (7.35 \times 10^5)(500) = 368\ \text{MW}, \quad P_{\text{loss}} = (500)^2(220) = 55\ \text{MW} (\approx 15\%)$$

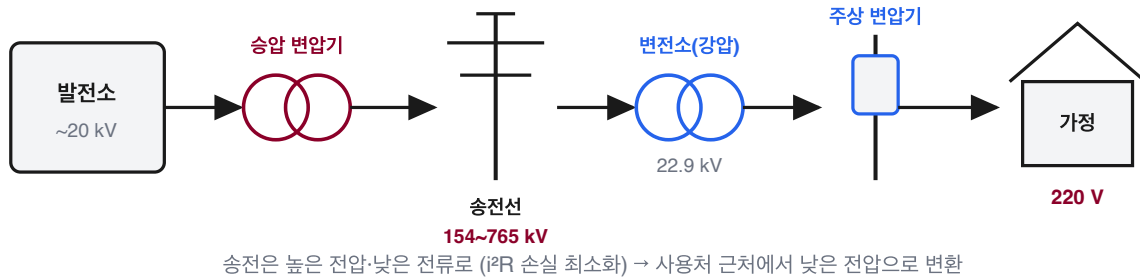
전압을 절반, 전류를 두 배로 하면 공급 전력은 같지만:

$$P_{\text{loss}} = (1000)^2(220) = 220\ \text{MW} (\approx 60\%)$$

손실이 4배가 된다. 한국의 송전 전압이 154 kV, 345 kV, 765 kV까지 올라가는 이유다.

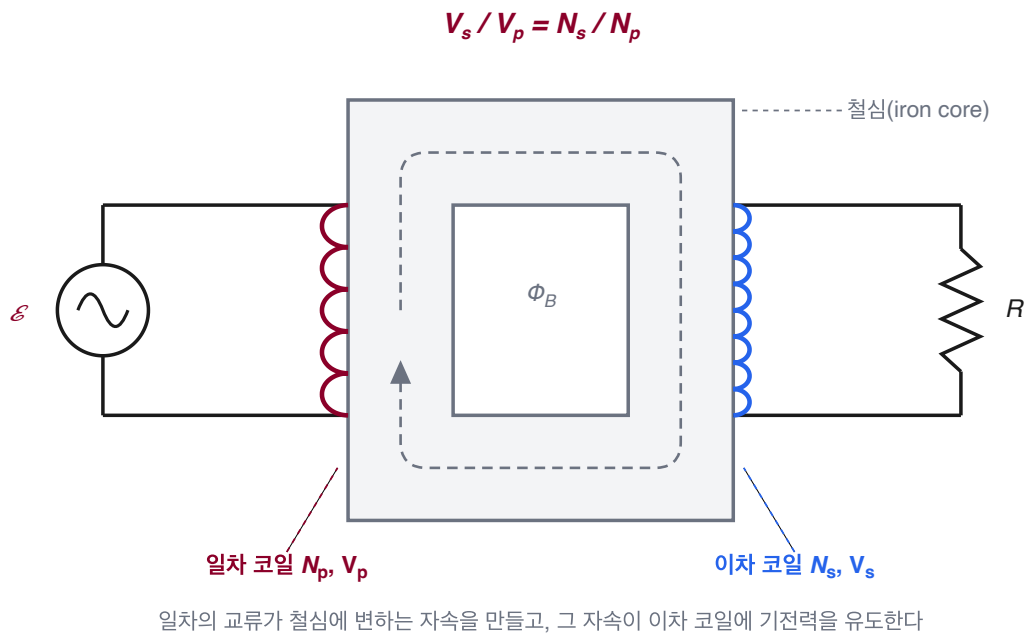
그래서 필요한 장치, 변압기

발전기는 수십 kV로 발전하고, 가정은 220 V를 쓰고, 송전은 수백 kV로 해야 한다. **전압을 자유롭게 올리고 내리는 장치**가 반드시 필요하다.



변압기(transformer)는 패러데이 유도 법칙만으로 이 일을 해낸다. 움직이는 부품도 없다. 골목 전봇대 위의 원통(주상 변압기)이 바로 마지막 단계 — 22.9 kV를 220 V로 낮추는 장치다.

이상 변압기: 전압 변환



철심에 **일차 코일(primary)** N_p 번, **이차 코일(secondary)** N_s 번을 감는다. 일차의 교류가 철심에 진동하는 자속 Φ_B 를 만들고, 이 자속이 두 코일을 모두 통과한다.

패러데이 법칙에 의해 **같은 한 바퀴당 유도되는 기전력 $d\Phi_B/dt$ 는 두 코일에서 같다.** 따라서:

$$\frac{V_p}{N_p} = \frac{V_s}{N_s} \Rightarrow \boxed{V_s = V_p \frac{N_s}{N_p}}$$

- $N_s > N_p$: **승압 변압기(step-up)** — 발전소 → 송전선
- $N_s < N_p$: **강압 변압기(step-down)** — 송전선 → 가정

이상 변압기: 전류 변환과 등가 저항

이차에 저항 부하 R 를 연결하면 이차 전류 I_s 가 흐른다. 이상 변압기는 에너지 손실이 없으므로, 에너지 보존에 의해:

$$I_p V_p = I_s V_s \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_s = I_p \frac{N_p}{N_s}}$$

전압을 올리면 전류는 그만큼 내려간다 — 공짜 에너지는 없다.

발전기 입장에서 본 등가 저항도 구해 보자. $I_s = V_s/R$ 와 위 두 식을 결합하면:

$$I_p = I_s \frac{N_s}{N_p} = \frac{V_s}{R} \frac{N_s}{N_p} = \frac{1}{R} \left(\frac{N_s}{N_p} \right)^2 V_p$$

즉 $I_p = V_p/R_{\text{eq}}$ 꼴이며:

$$R_{\text{eq}} = \left(\frac{N_p}{N_s} \right)^2 R$$

변압기는 부하 저항을 $(N_p/N_s)^2$ 배로 "변환"해 보여 준다 — 스피커와 앰프의 **임피던스 정합 (impedance matching)** 에도 쓰인다.

예제: 주상 변압기



전봇대 위 주상 변압기가 일차 $V_p = 22.9 \text{ kV(rms)}$ 를 받아 가정용 $V_s = 220 \text{ V}$ 를 공급한다 (이상 변압기, 저항 부하, 역률 1). (a) 권수비는?

$$\frac{N_p}{N_s} = \frac{V_p}{V_s} = \frac{22\,900 \text{ V}}{220 \text{ V}} \approx 104$$

(b) 이 변압기가 여러 가정에 총 $P_{\text{avg}} = 78 \text{ kW}$ 를 공급한다면 일차·이차 rms 전류는?

$$I_p = \frac{P_{\text{avg}}}{V_p} = \frac{78 \times 10^3}{22.9 \times 10^3} = 3.41 \text{ A}, \quad I_s = \frac{P_{\text{avg}}}{V_s} = \frac{78 \times 10^3}{220} = 355 \text{ A}$$

고압쪽 전선은 가늘어도 되고, 저압쪽 전선은 굵어야 하는 이유가 여기 있다.

예제 계속: 등가 저항 확인

(c) 이차 회로의 부하 저항 R_s 와, 일차에서 본 등가 저항 R_p 는?

$$R_s = \frac{V_s}{I_s} = \frac{220 \text{ V}}{355 \text{ A}} = 0.62 \Omega$$

$$R_p = \frac{V_p}{I_p} = \frac{22\,900 \text{ V}}{3.41 \text{ A}} \approx 6.7 \text{ k}\Omega$$

등가 저항 공식으로 계산하면:

$$R_p = \left(\frac{N_p}{N_s} \right)^2 R_s = (104)^2 (0.62 \Omega) \approx 6.7 \text{ k}\Omega \quad \checkmark$$

발전기는 0.62Ω 짜리 부하를 마치 $6.7 \text{ k}\Omega$ 처럼 "본다" — 그래서 작은 전류로 같은 전력을 보낼 수 있다.

Review & Summary (1/2)

LC 진동과 감쇠

- 에너지: $U_E = q^2/2C$ (축전기), $U_B = Li^2/2$ (인덕터), 저항이 없으면 $U = U_E + U_B$ 일정
- 에너지 보존 $\rightarrow$ LC 미분방정식과 해:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = 0 \quad \Rightarrow \quad q = Q \cos(\omega t + \phi), \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

- 전류: $i = -\omega Q \sin(\omega t + \phi)$, 전류 진폭 $I = \omega Q$
- 역학 대응: $x \leftrightarrow q, v \leftrightarrow i, m \leftrightarrow L, k \leftrightarrow 1/C$
- 감쇠 RLC: $q = Q e^{-Rt/2L} \cos(\omega' t + \phi), \omega' = \sqrt{\omega^2 - (R/2L)^2} \approx \omega$ (작은 R)

Review & Summary (2/2)

교류 회로와 변압기

개념	공식
리액턴스	$X_L = \omega_d L, \quad X_C = 1/\omega_d C$
임피던스	$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$
전류 진폭·위상	$I = \mathcal{E}_m / Z, \quad \tan \phi = (X_L - X_C) / R$
공명	$\omega_d = \omega = 1/\sqrt{LC}$ 일 때 $I = \mathcal{E}_m / R$ 최대
rms와 평균 전력	$I_{\text{rms}} = I/\sqrt{2}, \quad P_{\text{avg}} = \mathcal{E}_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos \phi = I_{\text{rms}}^2 R$
변압기	$V_s = V_p(N_s/N_p), \quad I_s = I_p(N_p/N_s), \quad R_{\text{eq}} = (N_p/N_s)^2 R$

기억할 것:

- 강제 진동은 항상 구동 진동수 ω_d 로 일어난다
- ELI the ICE man** : 유도성이면 전류가 뒤지고($\phi > 0$), 용량성이면 앞선다($\phi < 0$)
- 콘센트 220 V는 rms — 최댓값은 약 311 V
- 송전은 고전압·저전류로: 손실 $P_{\text{loss}} = I^2 R$