

30장: 유도와 인덕턴스

Induction and Inductance

지난 장과 이번 장

29장에서 우리는 **전류가 자기장을 만든다** 는 사실을 배웠다.

$$\text{전류 } i \longrightarrow \text{자기장 } \vec{B}$$

그렇다면 거꾸로는 어떨까? **자기장으로 전류를 만들 수는 없을까?**

- 답: 가능하다. 단, 자기장이 **변해야** 한다
- 변하는 자기장이 전기장을 만들고, 이 전기장이 전류를 몰고 간다
- 이 현상을 **유도(induction)** 라 하며, 지배하는 법칙이 **패러데이 유도 법칙(Faraday's law of induction)** 이다

이번 장은 전자기학 전체에서 가장 중요한 전환점 중 하나이다.

유도는 일상 속에 있다

- **발전소의 발전기** : 코일을 자기장 속에서 돌려 전기를 만든다 — 우리가 쓰는 전기의 거의 전부
- **인덕션 레인지** : 변하는 자기장이 냄비 바닥에 전류를 유도해 가열한다
- **무선 충전** : 충전 패드의 코일이 스마트폰 속 코일에 전류를 유도한다
- **교통카드(T-money)** : 단말기의 변하는 자기장이 카드 속 코일에 전력을 공급한다
- **전기 기타 픽업** : 진동하는 금속 줄이 코일의 자속을 바꿔 신호를 만든다



이번 강의 핵심 세 가지

1. 패러데이 법칙(Faraday's law) : 고리를 지나는 자속이 변하면 기전력이 유도된다

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

2. 렌츠 법칙(Lenz's law) : 유도 전류는 언제나 자속의 변화를 **방해하는 방향** 으로 흐른다
3. 인덕턴스(inductance) : 코일은 전류 변화를 거스르는 소자이며, 자기장에 에너지를 저장한다

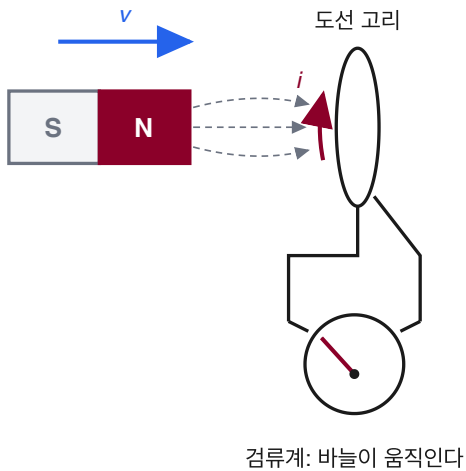
$$U_B = \frac{1}{2}Li^2$$

30.1 패러데이 법칙과 렌츠 법칙

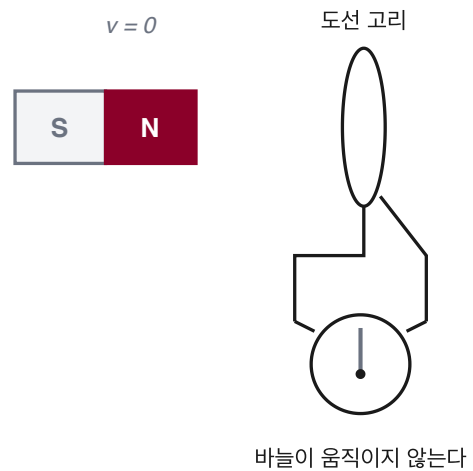
첫 번째 실험: 자석과 고리

전지 없이 도선 고리와 검류계만 연결한다. 그리고 막대자석을 고리에 가까이 가져가 본다.

(a) 자석이 움직이면 → 전류가 흐른다



(b) 자석이 멈추면 → 전류 없음



- 자석이 **움직이는 동안에만** 전류가 흐른다
- 자석이 멈추면 전류도 사라진다

전지가 없는데 전류가 생겼다! 이 전류를 **유도 전류(induced current)** 라 한다.

첫 번째 실험의 관찰 정리

실험을 반복하면 다음 규칙을 발견한다.

1. 전류는 자석과 고리 사이에 **상대 운동** 이 있을 때만 흐른다 (어느 쪽이 움직여도 좋다)
 2. **더 빨리** 움직이면 전류가 더 세다
 3. N극을 **가까이** 할 때와 **멀리** 할 때 전류의 방향이 반대다. S극이면 각각 또 반대다
- 전류를 만든 단위 전하당 일 → **유도 기전력(induced emf)**
 - 전류와 기전력을 만드는 이 과정 전체 → **유도(induction)**

두 번째 실험: 두 개의 고리

이번에는 자석 없이, 두 도선 고리를 가까이 놓는다. 오른쪽 고리에는 전지와 스위치, 왼쪽 고리에는 검류계만 연결한다.

- 스위치를 **닫는 순간** : 왼쪽 고리에 잠깐 전류가 흐른다
- 스위치를 **여는 순간** : 반대 방향으로 잠깐 전류가 흐른다
- 전류가 **일정하게 흐르는 동안** : 아무리 세도 유도 전류는 없다

두 실험의 공통점은 무엇일까? 자석의 운동도, 스위치 조작도 결국 **무언가를 변화시킨다**. 패러데이는 그 "무언가"를 알아냈다.

패러데이의 통찰

패러데이 유도 법칙을 정성적으로 말하면:

고리를 통과하는 **자기력선의 수가 변할 때** 고리에 기전력이 유도된다.

- 중요한 것은 자기력선의 개수 자체가 아니라 그 **변화율** 이다
- 자석이 다가오면 고리를 뚫는 자기력선 수가 늘어난다 → 유도
- 스위치를 닫으면 오른쪽 고리의 자기장이 커지면서 왼쪽 고리를 뚫는 자기력선이 늘어난다 → 유도

이를 정량화하려면 "고리를 통과하는 자기장의 양"을 재는 물리량이 필요하다. 그것이 **자속** 이다.

자속의 정의

23장에서 전기 선속 $\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$ 를 정의했던 것과 똑같이, 넓이 A 를 둘러싸는 고리를 지나 는 **자속(magnetic flux)** 을 정의한다.

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$d\vec{A}$ 는 미소 넓이 dA 에 수직인 벡터이다. 특수한 경우로, $\vec{B}$ 가 고리 면에 수직이고 균일하면:

$$\Phi_B = BA \quad (\vec{B} \perp \text{면}, \vec{B} \text{ 균일})$$

단위는 **웨버(weber, Wb)** :

$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2$$

패러데이 법칙

자속을 이용해 패러데이 법칙을 정량적으로 쓰면:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (\text{패러데이 법칙})$$

- 유도 기전력의 크기는 자속의 **시간 변화율** 과 같다
- 음(-) 부호는 기전력이 변화를 **거스른다** 는 뜻이다 (렌츠 법칙, 잠시 후)

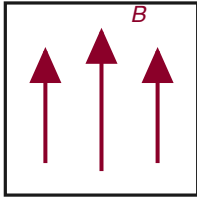
같은 자속이 모두 지나가는 N 회 감긴 촘촘한 코일이면, 각 감김의 기전력이 더해져서:

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (N\text{회 감긴 코일})$$

자속을 바꾸는 세 가지 방법

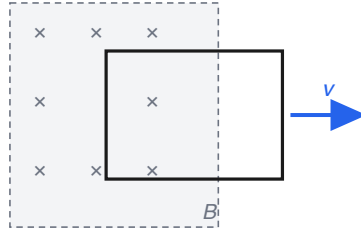
$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$ 를 바꿀 수 있는 길은 세 가지뿐이다.

① 자기장 크기 변화



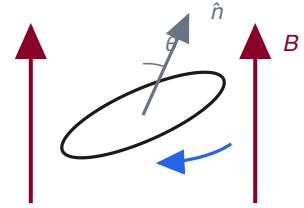
B의 세기를 키우거나 줄인다
 $dB/dt \neq 0$

② 장 속 면적 변화



고리를 장 밖으로 빼거나
안으로 넣는다

③ 각도 변화



고리를 회전시켜
B와 면의 각도를 바꾼다

세 경우 모두 자속 Φ 가 변한다 → 기전력이 유도된다

1. 자기장의 **크기** B 를 바꾼다
2. 자기장 속에 있는 고리의 **면적** 을 바꾼다 (넣거나 빼거나, 늘리거나 줄이거나)
3. $\vec{B}$ 와 고리 면 사이의 **각도** 를 바꾼다 (회전 — 발전기의 원리)

예제 1: 솔레노이드 속 코일 (설정)

긴 솔레노이드 S는 단위 길이당 $n = 220$ 회/cm로 감겨 있고 전류 $i = 1.5$ A가 흐른다. 그 중심에 지름 $d = 2.1$ cm, $N = 130$ 회 감긴 코일 C를 놓았다. 솔레노이드 전류를 25 ms 동안 일정한 비율로 0까지 줄이면, 코일 C에 유도되는 기전력은?

계획 :

- 솔레노이드 내부 자기장(29장): $B = \mu_0 i n$
- 코일 C를 지나는 자속: $\Phi_B = BA$ (A 는 코일 C의 단면적)
- 전류가 줄면 B 가 줄고 Φ_B 가 줄어든다 $\rightarrow$ 패러데이 법칙으로 $\mathcal{E} = N |d\Phi_B/dt|$

단위 변환: $n = 220$ 회/cm $= 22\,000$ 회/m, $A = \pi d^2/4 = 3.46 \times 10^{-4} \text{ m}^2$

예제 1: 솔레노이드 속 코일 (풀이)

처음 자속(감김 1회당):

$$\Phi_{B,i} = BA = (\mu_0 in)A = (4\pi \times 10^{-7})(1.5)(22\,000)(3.46 \times 10^{-4}) = 1.44 \times 10^{-5} \text{ Wb}$$

전류가 일정한 비율로 줄어드므로 자속도 일정한 비율로 줄어든다. 나중 자속은 0이므로:

$$\left| \frac{d\Phi_B}{dt} \right| = \frac{|0 - 1.44 \times 10^{-5}|}{25 \times 10^{-3}} = 5.76 \times 10^{-4} \text{ Wb/s}$$

$N = 130$ 회 코일의 유도 기전력:

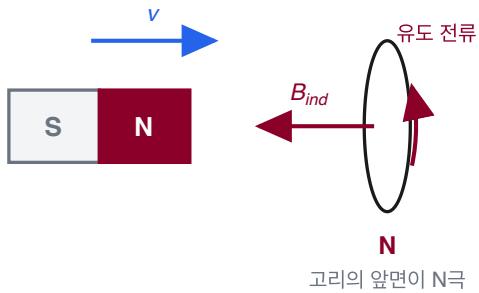
$$\mathcal{E} = N \left| \frac{d\Phi_B}{dt} \right| = (130)(5.76 \times 10^{-4}) \approx \boxed{75 \text{ mV}}$$

렌츠 법칙

패러데이 법칙의 음(-) 부호, 즉 유도 전류의 **방향** 을 정해 주는 규칙이다.

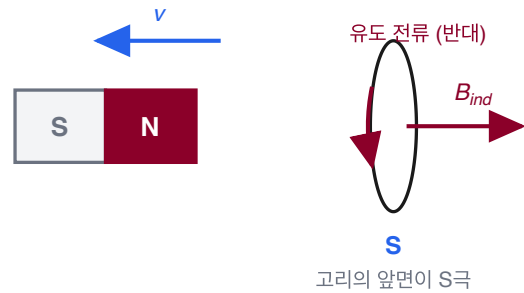
유도 전류는, **그 전류가 만드는 자기장** 이 자속의 변화를 **방해하는(oppose)** 방향으로 흐른다.

(a) N극이 다가올 때



자속이 늘어난다 → 유도 전류의 자기장은
자석 쪽을 향해 접근을 **밀어낸다**
(자석에서 보면 반시계 방향 전류)

(b) N극이 멀어질 때



자속이 줄어든다 → 유도 전류의 자기장은
자속을 유지하려 하며 자석을 **끌어당긴다**
(자석에서 보면 시계 방향 전류)

어느 쪽이든 유도 전류는 변화를 "방해"하는 방향이다

핵심 단어는 "**방해**" 이다. 유도 전류는 변화를 막으려 하지만, 완전히 막지는 못한다.

렌츠 법칙을 읽는 두 가지 방법

관점 1 — 극 운동을 방해 : 유도 전류가 흐르는 고리는 하나의 자기 쌍극자(작은 자석)가 된다.

- N극이 다가오면 → 고리의 앞면이 **N극** 이 되어 밀어낸다
- N극이 멀어지면 → 고리의 앞면이 **S극** 이 되어 붙잡는다

관점 2 — 자속 변화를 방해 : 유도 전류의 자기장 $\vec{B}_{\text{ind}}$ 가

- 자속이 **늘면** → $\vec{B}_{\text{ind}}$ 는 외부 자기장과 **반대** 방향 (증가를 상쇄)
- 자속이 **줄면** → $\vec{B}_{\text{ind}}$ 는 외부 자기장과 **같은** 방향 (감소를 보충)

주의: $\vec{B}_{\text{ind}}$ 가 항상 $\vec{B}$ 와 반대인 것이 아니라, 항상 **변화** $d\Phi_B/dt$ 와 반대다.

렌츠 법칙은 에너지 보존이다

만약 유도 전류가 변화를 **돕는** 방향으로 흐른다면 어떻게 될까?

- 자석을 살짝 밀면 → 고리가 자석을 끌어당김 → 자석이 가속 → 자속이 더 빨리 변함 → 전류가 더 세짐 → 더 세게 끌어당김 → ...
- 손대지 않아도 운동 에너지와 전기 에너지가 무한히 생기는 **영구기관** 이 된다!

실제로는 반대다. 자석을 밀어 넣으려면 **밀어내는 힘을 거슬러 일** 을 해야 하고, 그 일이 유도 전류의 전기 에너지(그리고 저항의 열)로 바뀐다.

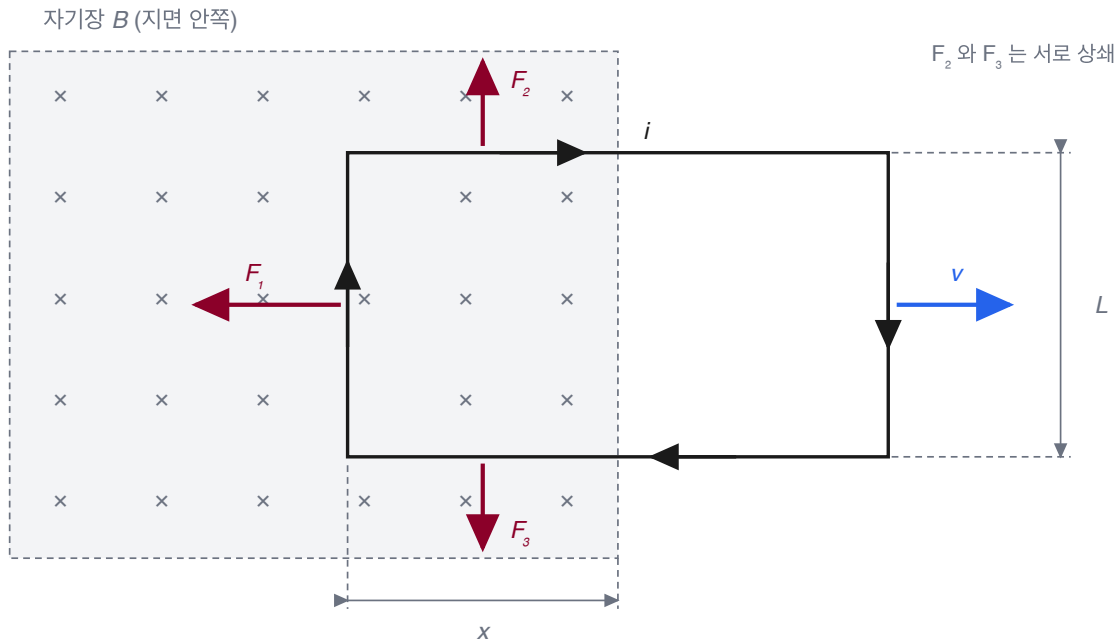
렌츠 법칙은 **에너지 보존 법칙** 이 유도 현상에서 드러나는 모습이다.

시뮬레이션: 패러데이 유도 실험실 — 자석을 코일에 넣었다 빼며 자속·기전력·유도 전류 관찰

30.2 유도과 에너지 전달

자기장에서 고리 끌어내기

렌츠 법칙에 따르면 자석과 고리의 상대 운동에는 항상 **저항하는 힘** 이 생기고, 이를 거슬러 일을 해야 한다. 그 일은 어디로 갈까? 계산하기 쉬운 상황으로 확인해 보자.



- 폭(높이) L 인 직사각형 고리(저항 R)가 균일한 자기장 $\vec{B}$ (지면 안쪽) 영역에 걸쳐 있다
- 고리를 일정한 속도 v 로 오른쪽으로 당겨 장 밖으로 꺼낸다

움직이는 고리의 유도 기전력

자기장 속에 남아 있는 고리 부분의 가로 길이를 x 라 하면, 장 속 면적은 Lx 이므로:

$$\Phi_B = BA = BLx$$

고리를 당기면 x 가 줄어 자속이 감소한다. 패러데이 법칙에서 (크기만 취하면):

$$\mathcal{E} = \left| \frac{d\Phi_B}{dt} \right| = BL \left| \frac{dx}{dt} \right| = \boxed{BLv}$$

유도 전류의 크기는:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{BLv}{R}$$

방향: 자속(지면 안쪽)이 줄어드므로, 렌츠 법칙에 의해 유도 전류는 지면 안쪽 자기장을 만드는 **시계 방향**이다.

고리에 작용하는 자기력

자기장 속에서 전류가 흐르는 도선은 힘을 받는다(28장):

$$\vec{F}_d = i\vec{L} \times \vec{B}$$

장 속에 있는 세 변이 힘 $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ 을 받는데:

- 위·아래 변의 $\vec{F}_2$ 와 $\vec{F}_3$ 은 크기가 같고 방향이 반대 → **상쇄**
- 왼쪽 변의 $\vec{F}_1$ 만 남고, 방향은 **당기는 반대쪽(왼쪽)** — 렌츠 법칙 그대로!

$$F_1 = iLB \sin 90^\circ = iLB = \left(\frac{BLv}{R} \right) LB = \boxed{\frac{B^2 L^2 v}{R}}$$

일정한 속도로 당기려면 정확히 이만한 힘 $F = F_1$ 을 계속 가해야 한다.

한 일은 모두 열이 된다

고리를 당기며 일하는 일률은 $P = Fv$ 이므로:

$$P_{\text{당김}} = Fv = \frac{B^2 L^2 v^2}{R}$$

한편 고리(저항 R)에서 열이 발생하는 일률은 $P = i^2 R$ 이므로:

$$P_{\text{열}} = i^2 R = \left(\frac{BLv}{R} \right)^2 R = \frac{B^2 L^2 v^2}{R}$$

$$\boxed{P_{\text{당김}} = P_{\text{열}}}$$

내가 고리에 해 준 **역학적 일** 이 정확히 같은 비율로 고리의 **열에너지** 로 바뀐다. 유도는 에너지를 전달하는 통로이다.

예제 2: 레일 위의 막대

간격 $L = 15.0 \text{ cm}$ 인 두 평행 레일 위를 금속 막대가 $v = 55.0 \text{ cm/s}$ 로 미끄러진다. 레일이 이루는 면에 수직인 자기장 $B = 0.350 \text{ T}$ 가 있고, 회로의 저항은 $R = 18.0 \Omega$ 이다.

(a) 유도 기전력:

$$\mathcal{E} = BLv = (0.350)(0.150)(0.550) = 2.89 \times 10^{-2} \text{ V} \approx 28.9 \text{ mV}$$

(b) 유도 전류:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{2.89 \times 10^{-2}}{18.0} = 1.60 \times 10^{-3} \text{ A} \approx 1.6 \text{ mA}$$

(c) 열이 발생하는 비율:

$$P = i^2 R = (1.60 \times 10^{-3})^2 (18.0) \approx 4.6 \times 10^{-5} \text{ W} = 46 \mu\text{W}$$

이는 막대를 등속으로 미는 데 드는 역학적 일률 Fv 와 정확히 같다.

맴돌이 전류

고리 대신 **통짜 금속판** 을 자기장에서 꺼내면 어떻게 될까?

- 전도 전자들이 한 줄로 흐르지 못하고 물의 소용돌이처럼 판 안에서 빙빙 돈다 → **맴돌이 전류 (eddy current)**
- 효과는 같다: 운동을 **방해하는 힘** 이 생기고, 역학적 에너지가 **열** 로 바뀐다
- 자기장 속에서 진자처럼 흔들리는 금속판은 몇 번 만에 멈춰 버린다 (자기 제동)

응용: 고속 열차·놀이기구의 **자기 브레이크**, 전자저울의 진동 감쇠, 고철 분리기.

주의 사례: MRI 검사 때 모니터 케이블이 피부에 두 점 이상 닿아 고리를 만들면, 변하는 자기장이 그 고리에 전류를 유도해 화상을 입힌 사고가 있었다.

인덕션 레인지: 냄물이 전류로 요리하기

인덕션 레인지 는 유도 가열(induction heating)의 대표적 예다.

- 상판 아래 코일에 고주파 교류를 흘린다 → 빠르게 변하는 자기장 발생
- 이 자기장이 **냄비 바닥에 냄물이 전류** 를 유도한다
- 냄비 자체의 저항에서 $P = i^2 R$ 의 열이 발생 → 냄비만 뜨거워진다



사진: 인덕션 위에 신문지를 깔고 냄비를 올려도 물이 끓는다. 열은 상판이 아니라 **냄비 바닥에서** 생기기 때문이다. 같은 원리로 제철소의 **유도로(induction furnace)** 는 금속을 통째로 녹인다.

30.3 유도 전기장

도선이 없어도 일어나는 일

반지름 r 인 구리 고리를 균일한 자기장 속에 놓고 B 를 일정한 비율로 키우면, 고리에 유도 전류가 흐른다.

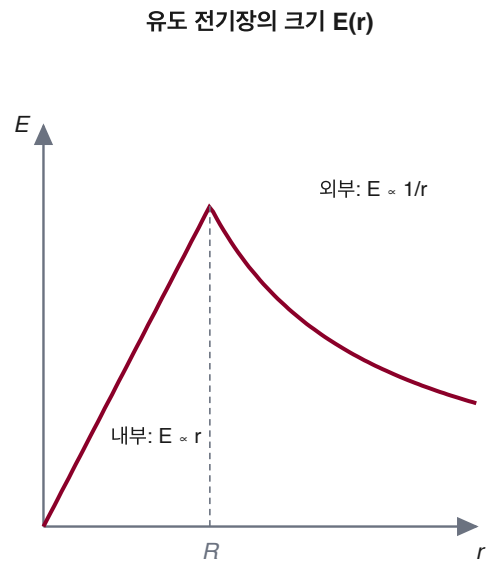
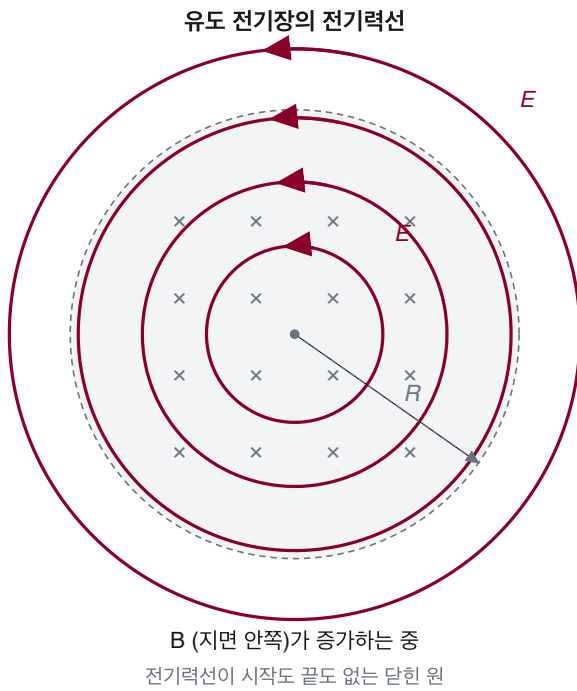
그런데 전류가 흐른다는 것은 전자를 미는 **전기장이 고리를 따라 존재** 한다는 뜻이다. 이 전기장은 변하는 자속이 만든 것이다.

변하는 자기장은 **전기장** 을 만든다.

- 이렇게 만들어진 **유도 전기장(induced electric field)** 은 정지 전하가 만드는 전기장과 똑같이 실재한다: 전하 q_0 에 힘 $q_0\vec{E}$ 를 가한다
- 놀라운 점: **구리 고리가 없어도**, 심지어 진공이라도, 전기장은 그 자리에 생긴다

유도 전기장의 모습

원형 대칭에 의해, 유도 전기장의 전기력선은 자기장 영역을 중심으로 한 **동심원** 을 이룬다.



- B 가 **증가** 하는 동안: 그림과 같은 방향의 $\vec{E}$
- B 가 **일정** 하면: 유도 전기장 없음
- B 가 **감소** 하면: 반대 방향의 동심원

기전력을 전기장으로 다시 쓰기

전하 q_0 가 반지름 r 인 원형 경로를 한 바퀴 돌 때, 유도 전기장이 해 준 일은 두 가지로 쓸 수 있다.

기전력의 정의(단위 전하당 일)로부터: $W = \mathcal{E}q_0$

힘 q_0E 가 거리 $2\pi r$ 에 걸쳐 한 일로부터:

$$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = (q_0E)(2\pi r)$$

둘을 같게 놓고 q_0 를 소거하면 $\mathcal{E} = 2\pi rE$. 일반적인(원이 아닌) 닫힌 경로에서는:

$$\boxed{\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}}$$

기전력이란 결국 **닫힌 경로를 따라 유도 전기장을 적분한 것**이다.

패러데이 법칙의 일반형

$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$ 를 패러데이 법칙 $\mathcal{E} = -d\Phi_B/dt$ 에 대입하면:

$$\boxed{\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}} \quad (\text{패러데이 법칙의 일반형})$$

- 좌변: 닫힌 경로를 따라 도는 전기장의 순환
- 우변: 그 경로가 둘러싸는 자속의 변화율
- 도선이 있든 없든, **모든 닫힌 경로**에 대해 성립한다

이 식은 나중에 배울 **맥스웰 방정식(Maxwell's equations)** 네 개 중 하나가 된다.

유도 전기장의 크기 구하기

반지름 R 인 원기둥 영역에만 자기장이 있고 dB/dt 가 일정하다고 하자. 대칭성에 의해 E 는 반지름 r 인 원 위에서 크기가 같고 접선 방향이다. 방향(부호)은 렌츠 법칙에 맡기고 크기만 계산하면:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = E(2\pi r)$$

내부 ($r \leq R$): 경로가 둘러싸는 자속은 $\Phi_B = B(\pi r^2)$ 이므로

$$E(2\pi r) = \pi r^2 \frac{dB}{dt} \Rightarrow \boxed{E = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}} \quad (E \propto r)$$

외부 ($r \geq R$): 자속은 $\Phi_B = B(\pi R^2)$ 뿐이므로

$$E(2\pi r) = \pi R^2 \frac{dB}{dt} \Rightarrow \boxed{E = \frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt}} \quad (E \propto 1/r)$$

자기장이 **없는 바깥에도** 유도 전기장은 존재한다 — 변압기가 가능한 이유다.

유도 전기장에는 전위가 없다

정전기장에서는 전위 V 를 정의할 수 있었다(24장). 유도 전기장에서는 불가능하다.

- 전기력선이 시작(+)과 끝(-)이 있는 정전기장과 달리, 유도 전기장의 전기력선은 닫힌 원이다
- 전하가 닫힌 원을 한 바퀴 돌면 유도 전기장이 알짜 일을 한다:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \neq 0$$

- 정전기장이라면 같은 적분이 항상 0이다: 제자리로 돌아오면 전위도 제자리여야 하므로

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (\text{정전기장})$$

같은 점의 전위가 한 바퀴마다 달라질 수는 없다. 따라서 전위는 정전기장에서만 의미가 있다.

30.4 인덕터와 인덕턴스

인덕터: 자기장을 만드는 소자

25장에서 **축전기(capacitor)**는 원하는 전기장을 만드는 소자였다. 대응되는 짝으로, **인덕터(inductor)**는 원하는 자기장을 만드는 소자이며 대표적인 형태가 **솔레노이드**이다.

인덕터의 N 개 감김에 전류 i 를 흘리면 각 감김에 자속 Φ_B 가 생긴다. **인덕턴스(inductance)**를 다음과 같이 정의한다.

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} \quad (\text{인덕턴스의 정의})$$

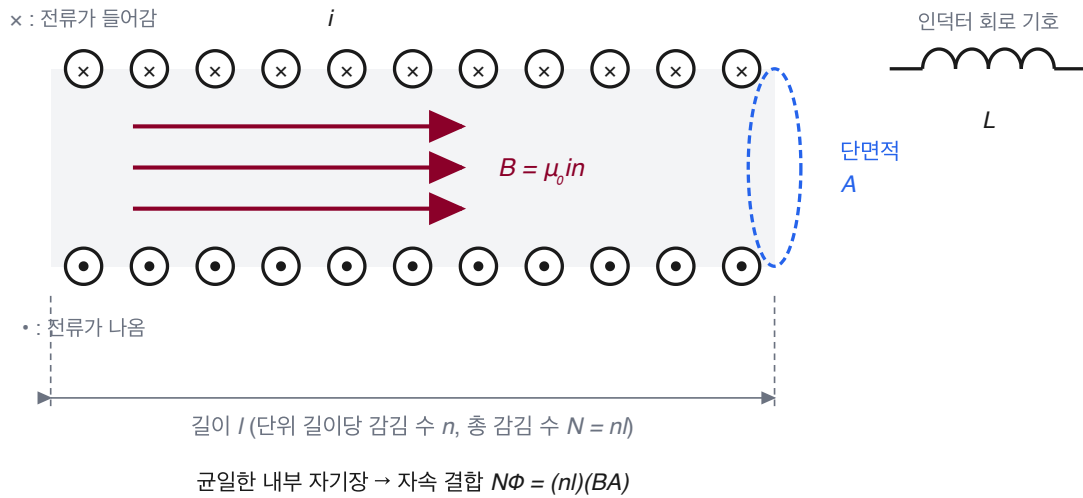
- $N\Phi_B$: **자속 결합(magnetic flux linkage)** — 감김 수 $\times$ 감김당 자속
- L 은 단위 전류당 자속 결합, 즉 "전류를 자속으로 바꾸는 효율"

단위는 **헨리(henry, H)**: $1 \text{ H} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2/\text{A} = 1 \text{ Wb}/\text{A}$

솔레노이드의 인덕턴스 유도

단면적 A , 단위 길이당 n 회 감긴 긴 솔레노이드의 가운데 부분, 길이 l 을 생각하자.

긴 솔레노이드의 단면 (축을 따라 자른 모습)



길이 l 속의 감김 수는 $N = nl$ 이므로 자속 결합은:

$$N\Phi_B = (nl)(BA)$$

솔레노이드의 인덕턴스 (계속)

솔레노이드 내부 자기장은 $B = \mu_0 in$ (29장)이므로, 정의에 대입하면:

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} = \frac{(nl)(BA)}{i} = \frac{(nl)(\mu_0 in)(A)}{i} = \boxed{\mu_0 n^2 l A}$$

단위 길이당 인덕턴스로 쓰면:

$$\boxed{\frac{L}{l} = \mu_0 n^2 A} \quad (\text{긴 솔레노이드})$$

- 전류 i 가 약분되어 사라졌다: 인덕턴스는 축전기의 전기용량처럼 **기하학적 구조만으로** 결정된다
- n^2 인 이유: n 을 3배로 하면 감김 수 N 도 3배, 감김당 자속 $\Phi_B = \mu_0 inA$ 도 3배 $\rightarrow$ 총 9배
- $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ — 투자율 상수를 헨리/미터로 쓸 수 있다

30.5 자체 유도

자기 자신에게 거는 유도

코일에 흐르는 전류가 변하면, **그 코일 자신을 지나는 자속**도 변한다. 그러면 패러데이 법칙에 따라 그 코일 자신에 기전력이 유도된다. 이를 **자체 유도(self-induction)**라 한다.

인덕턴스의 정의에서 $N\Phi_B = Li$. 패러데이 법칙을 자속 결합으로 쓰면:

$$\mathcal{E}_L = -\frac{d(N\Phi_B)}{dt} = -\frac{d(Li)}{dt}$$

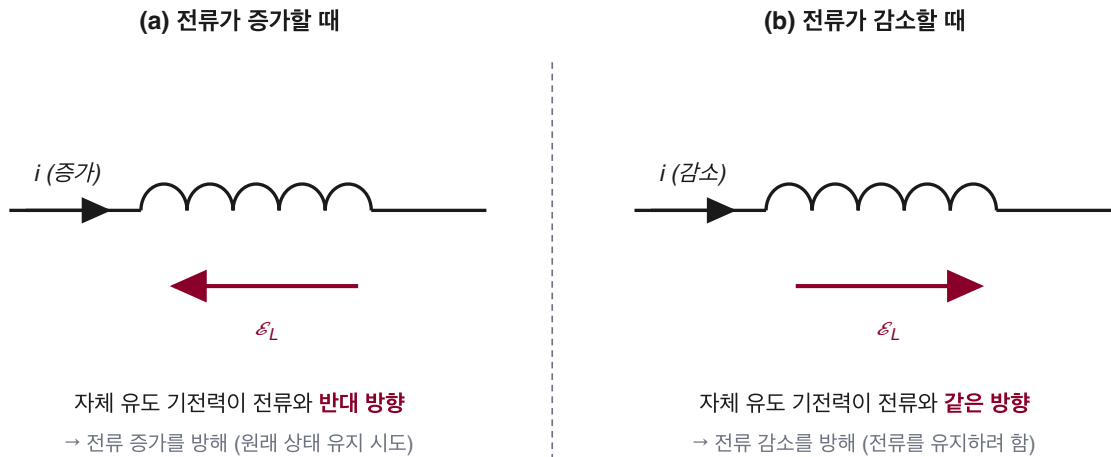
L 은 상수이므로:

$$\boxed{\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt}} \quad (\text{자체 유도 기전력})$$

전류의 **크기**가 아니라 **변화율**이 기전력을 결정한다.

자체 유도 기전력의 방향

방향은 렌츠 법칙으로 정해진다: $\mathcal{E}_L$ 은 언제나 전류의 **변화**를 방해한다.



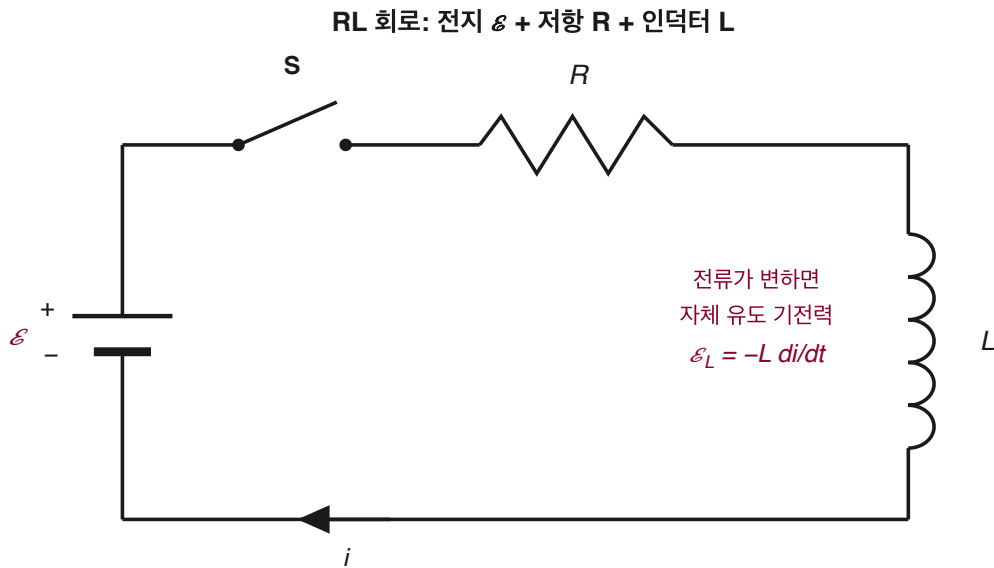
렌츠 법칙: $\mathcal{E}_L$ 은 언제나 전류의 "변화"를 방해한다

- 인덕터는 "전류의 관성"처럼 행동한다: 현재 전류를 유지하려 한다
- 참고: 변하는 자속 속에서는 전위를 정의할 수 없으므로, 인덕터 **내부**의 전위는 말할 수 없다. 하지만 (이상적인) 인덕터 **양단**의 전위차는 $|V_L| = |\mathcal{E}_L| = L |di/dt|$ 로 쓸 수 있다

30.6 RL 회로

스위치를 닫는 순간과 오랜 후

전지 $\mathcal{E}$, 저항 R , 인덕터 L 을 직렬로 연결하고 스위치를 닫는다.



스위치 S를 닫으면 전류가 0에서 $\mathcal{E}/R$ 까지 서서히 올라간다

- 스위치를 닫는 **순간**: 전류가 갑자기 늘려고 하면 $\mathcal{E}_L$ 이 반대로 버틴다 → 인덕터는 **끊어진 도선**처럼 행동 ($i = 0$)
- 오랜 후**: 전류가 일정해지면 $di/dt = 0$, $\mathcal{E}_L = 0$ → 인덕터는 **그냥 도선**처럼 행동 ($i = \mathcal{E}/R$)

그 사이는? 미분방정식을 풀어야 한다.

RL 회로의 고리 방정식

전류 i 의 방향을 따라 회로를 한 바퀴 돌며 전위 변화를 더한다(27장 고리 법칙).

- 저항: 전류 방향으로 지나며 전위 강하 $-iR$
- 인덕터: 전류가 증가 중이면 $\mathcal{E}_L$ 이 이를 방해하므로 전위 변화 $-L di/dt$
- 전지: $+\mathcal{E}$

$$-iR - L \frac{di}{dt} + \mathcal{E} = 0$$

정리하면:

$$\boxed{L \frac{di}{dt} + Ri = \mathcal{E}} \quad (RL \text{ 회로})$$

초기 조건은 $i(0) = 0$. 27장 RC 회로의 $R dq/dt + q/C = \mathcal{E}$ 와 똑같은 꼴이다 ($q \rightarrow i, R \rightarrow L, 1/C \rightarrow R$).

미분방정식 풀기

변수 분리로 처음부터 풀어 보자. $\frac{di}{dt} = \frac{\mathcal{E} - Ri}{L}$ 에서:

$$\frac{di}{\mathcal{E} - Ri} = \frac{dt}{L}$$

양변을 적분한다. 좌변은 $i' = 0 \rightarrow i$, 우변은 $t' = 0 \rightarrow t$:

$$\int_0^i \frac{di'}{\mathcal{E} - Ri'} = \int_0^t \frac{dt'}{L} \Rightarrow -\frac{1}{R} \ln\left(\frac{\mathcal{E} - Ri}{\mathcal{E}}\right) = \frac{t}{L}$$

로그를 풀면:

$$\ln\left(\frac{\mathcal{E} - Ri}{\mathcal{E}}\right) = -\frac{Rt}{L} \Rightarrow \mathcal{E} - Ri = \mathcal{E} e^{-Rt/L}$$

전류 상승의 해

i 에 대해 정리하면:

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-t/\tau_L}\right) \quad (\text{전류 상승})$$

여기서 **유도 시간 상수(inductive time constant)** 는:

$$\tau_L = \frac{L}{R}$$

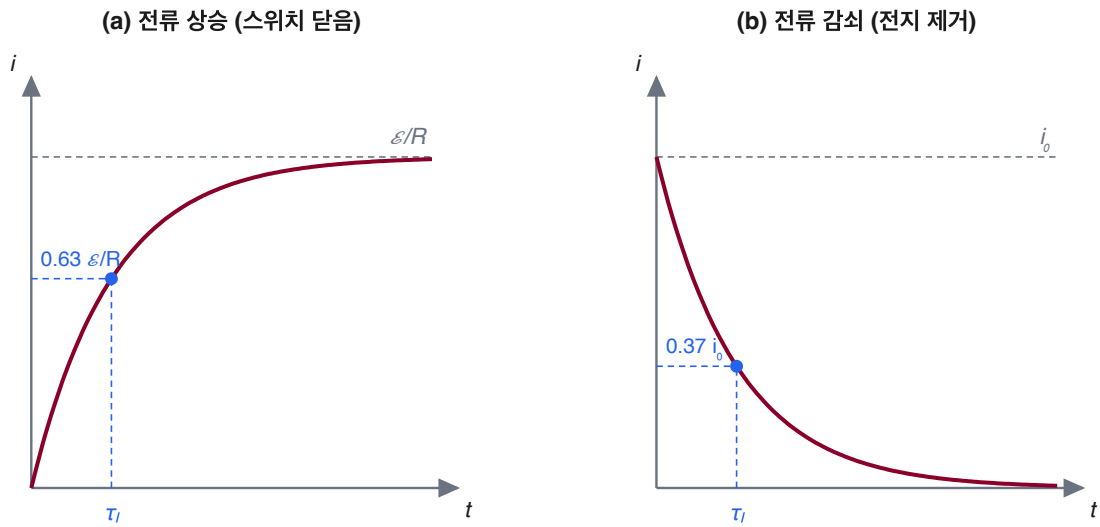
극한 확인:

- $t = 0$: $e^0 = 1$ 이므로 $i = 0$ ✓ (인덕터가 완전히 버팀)
- $t \rightarrow \infty$: $e^{-\infty} \rightarrow 0$ 이므로 $i \rightarrow \mathcal{E}/R$ ✓ (인덕터가 그냥 도선)
- $t = \tau_L$: $i = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-1}) \approx 0.63 \frac{\mathcal{E}}{R}$ — 최종값의 63%에 도달하는 시간

단위 확인: $1 \text{ H}/\Omega = 1 \frac{V \cdot s}{A} \cdot \frac{A}{V} = 1 \text{ s}$ ✓

저항과 인덕터의 전위차

$$V_R = iR = \mathcal{E} \left(1 - e^{-t/\tau_L} \right), \quad V_L = L \frac{di}{dt} = \mathcal{E} e^{-t/\tau_L}$$



상승과 감쇠 모두 같은 시간 상수 $\tau_L = L/R$ 이 지배한다

- V_R 는 0에서 $\mathcal{E}$ 로 **켜지고**, V_L 은 $\mathcal{E}$ 에서 0으로 **꺼진다**
- 언제나 $V_R + V_L = \mathcal{E}$ (고리 법칙)

전류의 감쇠

전류가 i_0 까지 오른 상태에서 전지를 회로에서 빼면($\mathcal{E} = 0$):

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0 \Rightarrow \frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt$$

적분하면 $\ln(i/i_0) = -t/\tau_L$, 즉:

$$\boxed{i(t) = i_0 e^{-t/\tau_L}} \quad (\text{전류 감쇠})$$

- 전류는 곧바로 0이 되지 못하고 시간 상수 τ_L 로 서서히 죽는다 — 인덕터가 전류를 유지하려 하기 때문
- $t = \tau_L$ 에서 처음의 37%
- 주의: 큰 전류가 흐르는 인덕터 회로를 갑자기 끊으면 di/dt 가 매우 커져 큰 기전력이 생긴다 → 스위치에 **불꽃(아크)** 이 된다

예제 3: 전류가 절반에 이르는 시간

인덕턴스 $L = 53 \text{ mH}$, 내부 저항 $R = 0.37 \Omega$ 인 솔레노이드를 전지에 연결했다. 전류가 최종 평형값의 절반에 이르는 데 걸리는 시간은?

상승식 $i = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau_L})$ 에서 $i = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{E}}{R}$ 로 놓으면:

$$\frac{1}{2} = 1 - e^{-t/\tau_L} \Rightarrow e^{-t/\tau_L} = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \tau_L \ln 2$$

시간 상수를 계산하면:

$$t = \frac{L}{R} \ln 2 = \frac{53 \times 10^{-3}}{0.37} \times 0.693 \approx \boxed{0.10 \text{ s}}$$

전지 전압과 무관하게, 오직 L/R 이 시간 척도를 정한다.

30.7 자기장에 저장된 에너지

에너지는 어디로 가는가

RL 회로의 고리 방정식 $\mathcal{E} = L \frac{di}{dt} + iR$ 의 양변에 i 를 곱하면:

$$\mathcal{E}i = Li \frac{di}{dt} + i^2 R$$

각 항의 의미를 읽어 보자.

- $\mathcal{E}i$: 전지가 회로에 에너지를 공급하는 비율 (시간 dt 당 전하 $dq = i dt$ 에 일 $\mathcal{E} dq$)
- $i^2 R$: 저항에서 열로 사라지는 비율
- $Li \frac{di}{dt}$: 남은 몫 — 에너지 보존에 의해, **인덕터의 자기장에 저장되는 비율** 이어야 한다

$$\frac{dU_B}{dt} = Li \frac{di}{dt}$$

자기 에너지 공식

$dU_B = Li \, di$ 를 전류가 0에서 i 가 될 때까지 적분하면:

$$\int_0^{U_B} dU'_B = \int_0^i Li' \, di' \Rightarrow \boxed{U_B = \frac{1}{2}Li^2} \quad (\text{자기 에너지})$$

축전기의 전기 에너지와 완벽하게 대응된다:

$$U_E = \frac{q^2}{2C} \leftrightarrow U_B = \frac{1}{2}Li^2$$

- 축전기는 **전하** 를 쌓아 전기장에, 인덕터는 **전류** 를 흘려 자기장에 에너지를 저장한다
- 예: $L = 53 \text{ mH}$ 코일에 $i = 34 \text{ A}$ 가 흐르면 $U_B = \frac{1}{2}(0.053)(34)^2 \approx 31 \text{ J}$

30.8 자기장의 에너지 밀도

단위 부피당 에너지

단면적 A 인 긴 솔레노이드의 가운데 길이 l 부분을 보자. 자기장은 내부에만 있고 균일하므로, 에너지는 부피 Al 에 고르게 퍼져 있다.

$$u_B = \frac{U_B}{Al} = \frac{Li^2}{2Al} = \frac{L}{l} \cdot \frac{i^2}{2A}$$

솔레노이드의 $L/l = \mu_0 n^2 A$ 를 대입하면:

$$u_B = \mu_0 n^2 A \cdot \frac{i^2}{2A} = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 i^2$$

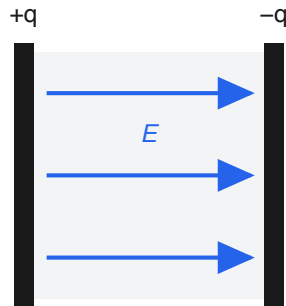
여기에 $B = \mu_0 i n$, 즉 $n i = B/\mu_0$ 를 대입하면:

$$\boxed{u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}} \quad (\text{자기 에너지 밀도})$$

솔레노이드로 유도했지만, 이 식은 **모든 자기장에서** 성립한다.

전기장과 자기장의 에너지 밀도

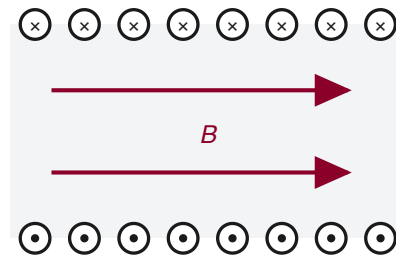
축전기: 전기장에 에너지 저장



$$u_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

에너지 밀도 $\propto E^2$

인덕터: 자기장에 에너지 저장



$$u_B = B^2/2\mu_0$$

에너지 밀도 $\propto B^2$

에너지는 "장(field)" 자체에 저장된다

$$u_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2, \quad u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

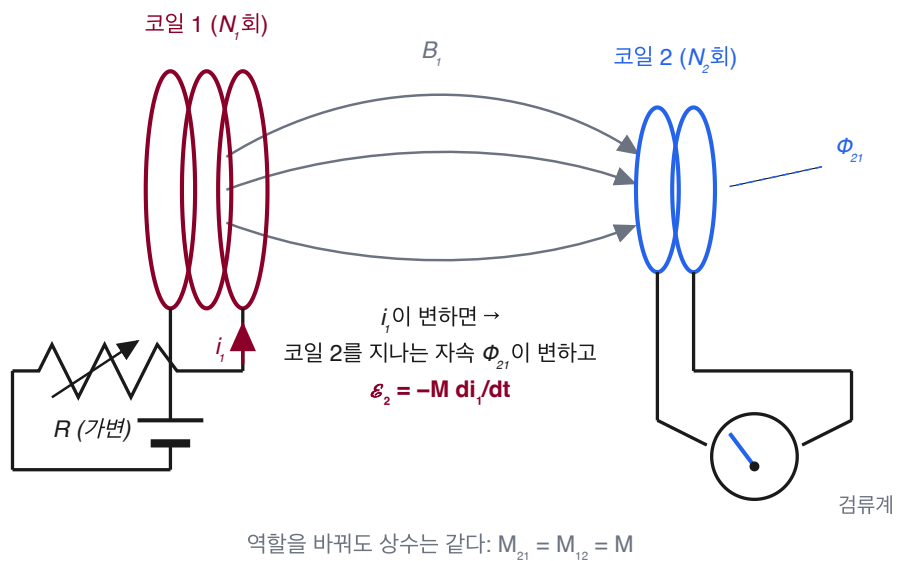
- 두 에너지 밀도 모두 **장의 제곱**에 비례한다 — 에너지는 장 자체에 실려 있다
- 크기 감각: MRI의 $B = 1.5 \text{ T} \rightarrow u_B = \frac{(1.5)^2}{2(4\pi \times 10^{-7})} \approx 9.0 \times 10^5 \text{ J/m}^3$
- 지구 자기장 $B \approx 5 \times 10^{-5} \text{ T} \rightarrow u_B \approx 1.0 \times 10^{-3} \text{ J/m}^3$ — 10억 배 차이

30.9 상호 유도

두 코일 사이의 유도

30.1절의 두 번째 실험으로 돌아가자. 두 코일이 가까이 있으면, 코일 1의 전류 i_1 이 만드는 자속 일부가 코일 2를 지나간다.

상호 유도: 코일 1의 전류 변화가 코일 2에 기전력을 만든다



자체 유도와 구분해 이를 **상호 유도(mutual induction)**라 한다.

상호 인덕턴스

코일 1에 대한 코일 2의 **상호 인덕턴스(mutual inductance)**를 자체 인덕턴스($L = N\Phi/i$)와 같은 꼴로 정의한다.

$$M_{21} = \frac{N_2\Phi_{21}}{i_1}$$

Φ_{21} 은 i_1 이 코일 2의 감김 하나에 만드는 자속이다. 양변에 i_1 을 곱하고 시간 미분하면:

$$M_{21} \frac{di_1}{dt} = N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt}$$

우변은 패러데이 법칙에 의해 코일 2에 유도되는 기전력의 크기이므로:

$$\mathcal{E}_2 = -M_{21} \frac{di_1}{dt}$$

자체 유도의 $\mathcal{E} = -L di/dt$ 와 똑같은 구조다.

역할을 바꾸면

이번에는 코일 2에 전류 i_2 를 흘리고 변화시키면, 코일 1에 기전력이 유도된다:

$$\mathcal{E}_1 = -M_{12} \frac{di_2}{dt}$$

놀랍게도 두 상수는 (증명은 생략하지만) 항상 같다:

$$M_{21} = M_{12} = M$$

따라서 최종적으로:

$$\boxed{\mathcal{E}_2 = -M \frac{di_1}{dt}, \quad \mathcal{E}_1 = -M \frac{di_2}{dt}}$$

M 의 단위도 **헨리(H)** 이다. 크기는 두 코일의 기하학적 배치(거리, 방향, 겹침)에 달려 있다.

예제 4: 자동차 점화 코일

자동차 엔진의 점화 장치는 상호 유도로 스파크 전압을 만든다. 1차 코일의 전류가 $i_1 = 6.0 \text{ A}$ 에서 0까지 $\Delta t = 3.0 \text{ ms}$ 동안 일정하게 줄어든 때 2차 코일에 $|\mathcal{E}_2| = 30 \text{ kV}$ 가 유도된다면, 두 코일의 상호 인덕턴스는?

전류 변화율의 크기:

$$\left| \frac{di_1}{dt} \right| = \frac{6.0 \text{ A}}{3.0 \times 10^{-3} \text{ s}} = 2.0 \times 10^3 \text{ A/s}$$

상호 유도 공식 $|\mathcal{E}_2| = M |di_1/dt|$ 에서:

$$M = \frac{|\mathcal{E}_2|}{|di_1/dt|} = \frac{30 \times 10^3}{2.0 \times 10^3} = \boxed{15 \text{ H}}$$

12 V 전지로 30,000 V를 만드는 비결: 전압이 아니라 **빠른 전류 변화**가 핵심이다.

상호 유도의 응용

- **변압기(transformer)** : 교류 전압을 올리고 내리는 장치 — 송전의 핵심 (31장에서 자세히)
- **무선 충전** : 패드의 1차 코일 $\leftrightarrow$ 기기의 2차 코일 사이의 상호 유도
- **교통카드·NFC** : 단말기의 진동 자기장이 카드 코일에 전력과 신호를 동시에 전달
- **점화 코일** : 방금 본 예제 — 저전압 직류에서 고전압 펄스 생성

두 코일이 물리적으로 닿아 있지 않아도 에너지와 신호가 전달된다는 것이 상호 유도의 힘이다.

Review & Summary

핵심 개념

- **자속** : $\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$, 균일·수직이면 $\Phi_B = BA$ (단위: Wb)
- **패러데이 법칙** : 자속이 변하면 기전력이 유도된다, $\mathcal{E} = -N d\Phi_B/dt$
- **렌츠 법칙** : 유도 전류는 변화를 방해하는 방향 — 에너지 보존의 표현
- **유도 전기장** : 변하는 자기장은 전기장을 만든다, $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -d\Phi_B/dt$ (전위 정의 불가)
- **인덕터** : $L = N\Phi_B/i$, 자체 유도 $\mathcal{E}_L = -L di/dt$
- **RL 회로** : 시간 상수 $\tau_L = L/R$ 로 전류가 지수적으로 상승·감쇠
- **자기 에너지** : $U_B = \frac{1}{2}Li^2$, 에너지 밀도 $u_B = B^2/2\mu_0$

핵심 공식

개념	공식
자속	$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$ (균일·수직이면 BA)
패러데이 법칙	$\mathcal{E} = -N d\Phi_B/dt$, 일반형 $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -d\Phi_B/dt$
움직이는 도체의 기전력	$\mathcal{E} = BLv$, $P_{\text{당김}} = P_{\text{열}} = B^2 L^2 v^2 / R$
인덕턴스 / 자체 유도	$L = N\Phi_B/i$, $L/l = \mu_0 n^2 A$ (솔레노이드), $\mathcal{E}_L = -L di/dt$
RL 회로	$i = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau_L})$, $i = i_0 e^{-t/\tau_L}$, $\tau_L = L/R$
자기 에너지 / 상호 유도	$U_B = \frac{1}{2} Li^2$, $u_B = B^2/2\mu_0$, $\mathcal{E}_2 = -M di_1/dt$

기억할 것:

- 유도를 일으키는 것은 자속의 크기가 아니라 **변화율** 이다
- 렌츠 법칙: 유도 전류는 언제나 변화에 **반대** — 공짜 에너지는 없다
- 인덕터는 전류의 관성: 처음엔 끊긴 도선, 오랜 후엔 그냥 도선
- 단위: $1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2$, $1 \text{ H} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2/\text{A}$, $1 \text{ H}/\Omega = 1 \text{ s}$