

29장: 전류에 의한 자기장

Magnetic Fields Due to Currents

지난 장과 이번 장

28장에서는 **주어진 자기장** 속에서 움직이는 전하와 전류가 받는 힘을 배웠다.

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}, \quad \vec{F} = i\vec{L} \times \vec{B}$$

이번 장에서는 질문을 뒤집는다.

그 자기장은 애초에 **누가** 만드는가?

답: **움직이는 전하, 즉 전류가 자기장을 만든다.** 전기와 자기는 동전의 양면이다.

외르스테드의 발견 (1820)

덴마크의 물리학자 **외르스테드(Ørsted)** 는 강의 도중 우연히, 전류가 흐르는 도선 옆에서 **나침반 바늘이 움직이는** 것을 발견했다.

- 전기 현상과 자기 현상이 서로 연결되어 있다는 **최초의 실험적 증거**
- 이 발견에서 출발한 **전자기학(electromagnetism)** 은 오늘날 모터, 발전기, 전자석, MRI, 핵융합 장치까지 이어진다

이번 장은 "전류 → 자기장"의 정량적인 법칙을 세우는 장이다.

이번 장의 로드맵

1. **비오-사바르 법칙(Biot-Savart law)** : 전류 조각이 만드는 자기장의 기본 법칙
2. 적분으로 계산: **직선 도선, 원호, 전류 고리의 축**
3. 평행한 두 전류 사이의 **힘** — 인력과 척력
4. **암페어 법칙(Ampère's law)** : 대칭성이 좋을 때의 지름길 (가우스 법칙의 자기 버전)
5. **솔레노이드와 토로이드** — 균일한 자기장을 만드는 장치
6. 전류 고리 = **자기 쌍극자(magnetic dipole)**

29.1 전류에 의한 자기장

전류 요소가 만드는 자기장

전하 요소 dq 가 전기장을 만들듯이, 도선을 잘게 나눈 **전류-길이 요소 (current-length element)** $i d\vec{s}$ 가 자기장을 만든다.

거리 r 떨어진 점 P 에서, 한 요소가 만드는 자기장의 **크기**는:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i ds \sin \theta}{r^2}$$

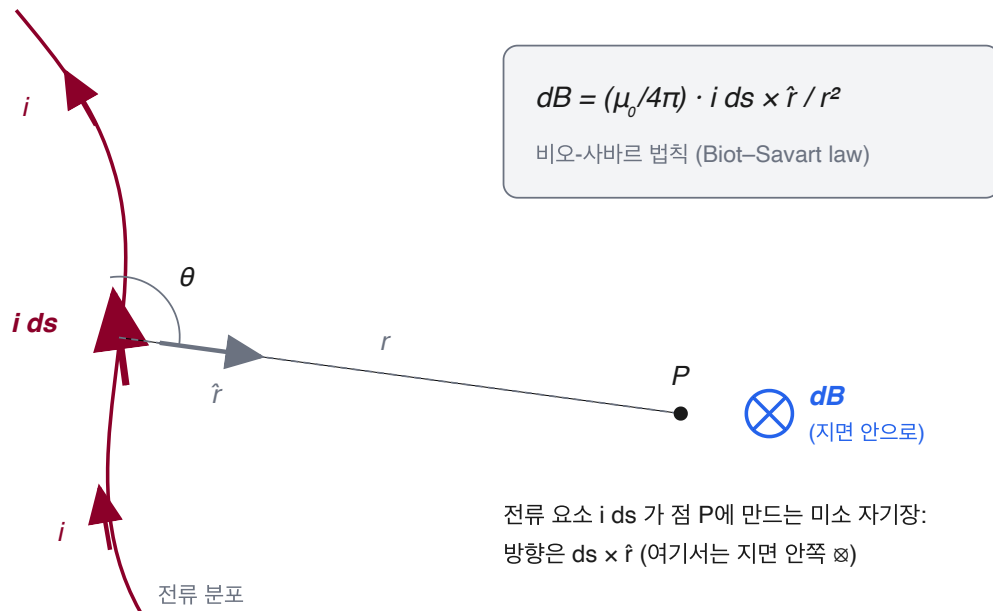
- θ : $d\vec{s}$ 와 $\hat{r}$ (요소에서 P 를 향하는 단위벡터) 사이의 각
- μ_0 : **투자율 상수(permeability constant)**

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A} \approx 1.26 \times 10^{-6} \text{ T} \cdot \text{m/A}$$

비오-사바르 법칙

방향까지 포함한 벡터 형태가 **비오-사바르 법칙(Biot-Savart law)** 이다.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$



- $d\vec{B}$ 의 방향은 벡터곱 $d\vec{s} \times \hat{r}$ 의 방향 (그림에서는 지면 안쪽 $\otimes$)
- 전체 자기장은 모든 요소의 기여를 **적분(중첩)** 해서 얻는다

쿨롱 법칙과 비교

비오-사바르 법칙은 쿨롱 법칙처럼 **역제곱 법칙**이지만, 결정적인 차이가 있다.

	전기장 (쿨롱)	자기장 (비오-사바르)
원천	전하 요소 dq (스칼라)	전류 요소 $i d\vec{s}$ (벡터)
거리 의존성	$1/r^2$	$1/r^2$
방향	$\hat{r}$ 방향 (지름 방향)	$d\vec{s} \times \hat{r}$ 방향 (수직)

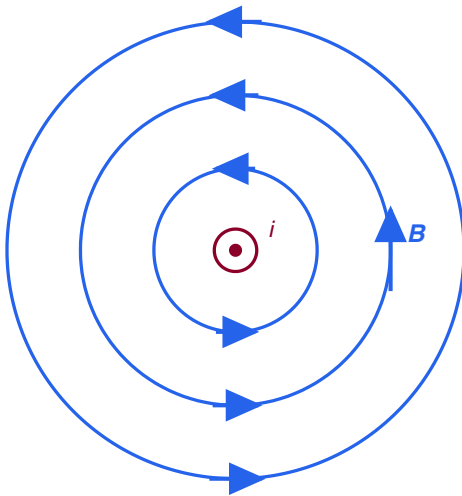
- 전기장은 원천에서 **뿔어나가는** 방향, 자기장은 원천을 **감아도는** 방향
- $d\vec{s}$ 와 $\hat{r}$ 이 나란하면($\theta = 0^\circ$ 또는 180°) 그 요소의 기여는 **0**

긴 직선 도선의 자기장

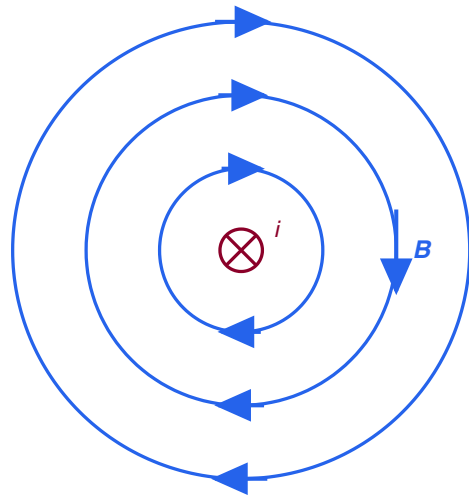
비오-사바르 법칙을 적분하면 (잠시 후 유도), 전류 i 가 흐르는 무한히 긴 직선 도선에서 수직 거리 R 인 점의 자기장 크기는:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \quad (\text{긴 직선 도선})$$

전류가 나오는 방향 $\odot$



전류가 들어가는 방향 $\otimes$



오른손 엄지 = 전류 방향, 감아쥔 네 손가락 = 자기장 방향 (자기력선은 도선을 감싸는 동심원)

자기력선은 도선을 감싸는 동심원 이다. 기호 약속: $\odot$ 는 지면에서 나오는 방향, $\otimes$ 는 지면으로 들어가는 방향.

오른손 법칙: 전류 → 자기장 방향

자기장의 크기 계산보다 어려운 것이 **방향** 찾기다. 다음 규칙 하나면 충분하다.

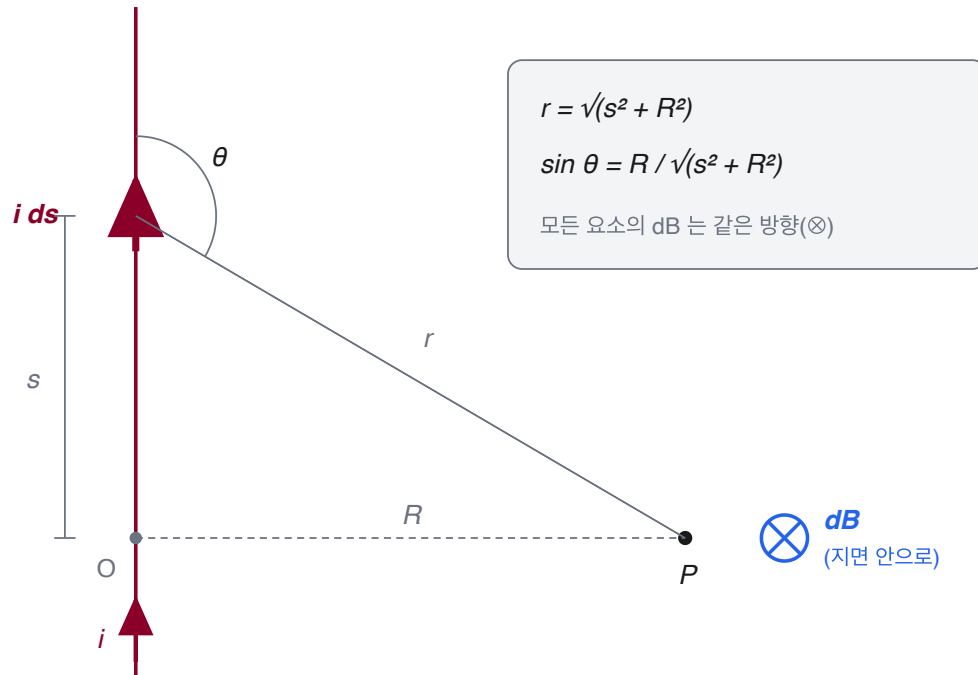
감아쥔 오른손 법칙(curled-straight right-hand rule) : 오른손 엄지를 전류 방향으로 향하게 도선을 감아쥐면, 나머지 네 손가락이 감기는 방향이 자기력선의 방향이다.

- 임의의 점에서 $\vec{B}$ 는 그 점을 지나는 **원의 접선** 방향
- 도선과 점을 잇는 지름 방향 직선에 항상 **수직**
- 전류를 반대로 하면 자기장도 모든 곳에서 반대가 된다

철가루를 뿌리면 이 동심원 무늬가 실제로 나타난다.

유도: 직선 도선 (1) — 설정

무한 직선 도선에서 수직 거리 R 인 점 P 의 자기장을 비오-사바르 법칙으로 구하자.



무한 직선 도선: 위쪽 절반의 기여를 적분한 뒤 대칭으로 2배

- 도선 위 높이 s 에 있는 요소 $i d\vec{s}$ 가 P 에 만드는 장은 모두 **같은 방향** (지면 안 쪽 $\otimes$)
- 방향이 같으므로 크기만 적분하면 된다

유도: 직선 도선 (2) — 적분식 세우기

아래쪽 절반은 대칭에 의해 위쪽 절반과 똑같이 기여하므로, 위쪽 절반을 적분해서 **2배** 한다.

$$B = 2 \int_0^\infty dB = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \theta \, ds}{r^2}$$

변수 s , r , θ 는 독립이 아니다. 그림의 기하에서:

$$r = \sqrt{s^2 + R^2}, \quad \sin \theta = \sin(\pi - \theta) = \frac{R}{\sqrt{s^2 + R^2}}$$

대입하면 적분 변수가 s 하나로 정리된다:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_0^\infty \frac{R \, ds}{(s^2 + R^2)^{3/2}}$$

유도: 직선 도선 (3) — 적분 계산

치환 $s = R \tan \phi$ 로 얻어지는 표준 적분 공식을 쓴다:

$$\int \frac{ds}{(s^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{s}{R^2 \sqrt{s^2 + R^2}} + C$$

(우변을 미분해 보면 확인된다.) 극한값을 대입하면:

$$B = \frac{\mu_0 i R}{2\pi} \left[\frac{s}{R^2 \sqrt{s^2 + R^2}} \right]_0^\infty = \frac{\mu_0 i R}{2\pi} \left(\frac{1}{R^2} - 0 \right)$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}}$$

$s \rightarrow \infty$ 에서 $\frac{s}{\sqrt{s^2 + R^2}} \rightarrow 1$ 이므로 괄호 안은 $1/R^2$ 이 된다.

반무한 직선 도선

방금 본 것처럼 위쪽 절반(반무한 도선)의 기여는 전체의 절반이다. 즉 도선의 **한 쪽 끝** 에서 수직 거리 R 인 점에서는:

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 i}{4\pi R}} \quad (\text{반무한 직선 도선})$$

직선 도선 결과의 물리적 의미:

- $B \propto i$: 전류가 셀수록 강한 자기장
- $B \propto 1/R$: 거리에 **반비례** (점전하의 $1/r^2$ 과 다르다!)
- 무한히 긴 "선" 원천이므로 거리 의존성이 완만해진다 (무한 선전하의 전기장 $E = \lambda/2\pi\epsilon_0 r$ 과 같은 구조)

예제 1: 고압 송전선 아래의 자기장

전류 $i = 500$ A가 흐르는 송전선이 지상 $h = 10$ m 높이에 있다. 바로 아래 지면에서의 자기장 크기를 구하라.

직선 도선 공식에 대입하면:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi h} = \frac{(4\pi \times 10^{-7})(500)}{2\pi(10)}$$

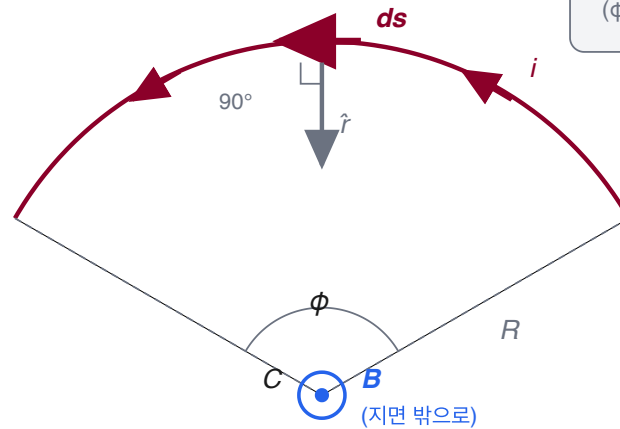
$4\pi/2\pi = 2$ 이므로:

$$B = \frac{2 \times 10^{-7} \times 500}{10} = \boxed{1.0 \times 10^{-5} \text{ T} = 10 \mu\text{T}}$$

한국에서 지구 자기장은 약 $50 \mu\text{T}$ 이다. 대전류 송전선 바로 아래에서도 **지구 자기장의 1/5 수준**에 불과하다.

원호 중심의 자기장 — 설정

이번에는 반지름 R , 중심각 ϕ 인 **원호(circular arc)** 모양 도선이 중심 C 에 만드는 자기장이다.



$$B = \mu_0 i \phi / 4\pi R$$

(ϕ 는 라디안, 중심 C 에서만)

원호 위 어디서나 $ds \perp \hat{r}$, $r = R \rightarrow$ 모든 요소의 dB 가 같은 방향으로 더해진다

원호 위 **어디서나** :

- $d\vec{s} \perp \hat{r}$ 이므로 $\sin \theta = \sin 90^\circ = 1$
- 요소에서 중심까지 거리는 항상 $r = R$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i ds \sin 90^\circ}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i ds}{R^2}$$

원호 중심의 자기장 — 적분

모든 요소의 $d\vec{B}$ 가 같은 방향(그림에서는 지면 밖 $\odot$)이므로 크기만 더한다. 호의 길이 대신 각도로 표현하기 위해 $ds = R d\phi$ 를 대입:

$$B = \int dB = \int_0^\phi \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{iR d\phi}{R^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \int_0^\phi d\phi$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 i \phi}{4\pi R}} \quad (\text{원호의 중심에서, } \phi \text{는 라디안})$$

완전한 원($\phi = 2\pi$)이면:

$$B = \frac{\mu_0 i (2\pi)}{4\pi R} = \frac{\mu_0 i}{2R} \quad (\text{원형 고리의 중심})$$

주의: 이 공식은 **곡률 중심에서만** 성립하고, ϕ 는 반드시 **라디안** 으로 넣는다.

예제 2: 반원 회로의 중심 자기장

전류 $i = 10 \text{ A}$ 가 흐르는 회로가 반지름 $R = 5.0 \text{ cm}$ 인 **반원** 과, 중심 C 를 향해 곧게 뻗은 두 개의 **직선 구간** 으로 되어 있다. C 에서의 자기장은?

직선 구간의 기여 : 전류 방향 $d\vec{s}$ 가 C 를 향하는 지름 방향과 나란하다. $\theta = 0^\circ$ 또는 180° 이므로 $\sin \theta = 0$:

$$B_{\text{직선}} = 0$$

반원의 기여 : $\phi = \pi$ 를 대입하면:

$$B = \frac{\mu_0 i \pi}{4\pi R} = \frac{\mu_0 i}{4R} = \frac{(4\pi \times 10^{-7})(10)}{4(0.050)} = \boxed{6.3 \times 10^{-5} \text{ T} \approx 63 \mu\text{T}}$$

방향은 오른손 법칙으로: 그림의 전류 방향에 따라 지면 안 또는 밖.

개념 확인: 두 도선 사이의 중점

같은 크기의 전류 $i = 5.0 \text{ A}$ 가 흐르는 두 평행 도선이 $d = 8.0 \text{ cm}$ 떨어져 있다. 두 도선의 정중앙에서 각 도선이 만드는 장의 크기는 ($r = 4.0 \text{ cm}$):

$$B_1 = B_2 = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} = \frac{(2 \times 10^{-7})(5.0)}{0.040} = 25 \mu\text{T}$$

자기장은 **벡터** 이므로 방향이 관건이다 (오른손 법칙으로 각각 판정):

- 두 전류가 **같은 방향** : 중점에서 두 장이 서로 **반대 방향** $\rightarrow B = 0$
- 두 전류가 **반대 방향** : 중점에서 두 장이 **같은 방향** $\rightarrow B = 50 \mu\text{T}$

여러 전류가 있으면 언제나 **벡터 합(중첩 원리)** 으로 구한다.

29.2 두 평행 전류 사이의 힘

전류는 서로 힘을 주고받는다

전류는 자기장을 **만들고** (29.1), 자기장 속의 전류는 힘을 **받는다** (28장). 그러면 나란한 두 전류는 서로 힘을 주고받아야 한다!

일반적인 절차:

도선 b 가 받는 힘 = 도선 a 가 도선 b 위치에 만드는 자기장 $\vec{B}_a$ 를 먼저 구하고, 그 장 속에서 전류 i_b 가 받는 힘 $\vec{F}_{ba} = i_b \vec{L} \times \vec{B}_a$ 를 구한다.

거리 d 만큼 떨어진 도선 b 의 위치에서, 도선 a 의 장의 크기는:

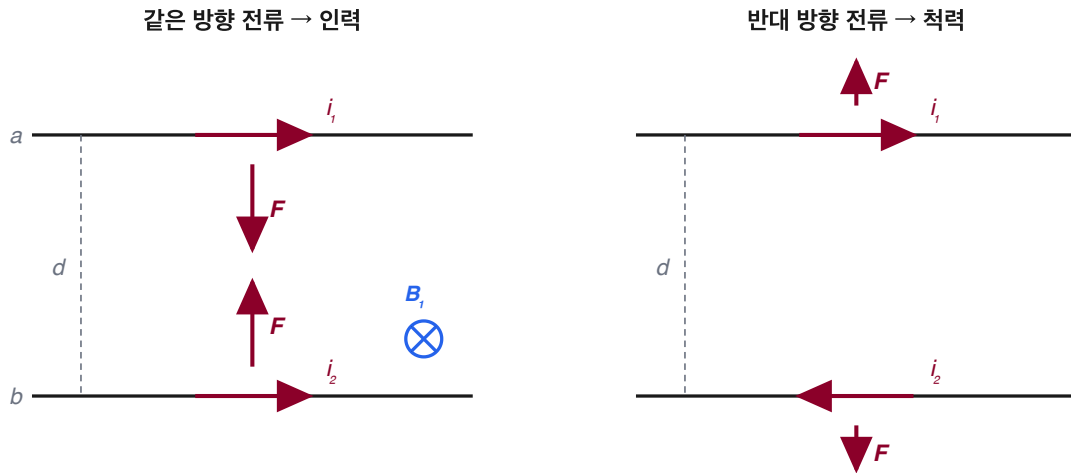
$$B_a = \frac{\mu_0 i_a}{2\pi d}$$

힘의 크기와 방향

도선 b 의 길이 L 구간이 받는 힘은 $\vec{L} \perp \vec{B}_a$ 이므로:

$$F_{ba} = i_b L B_a \sin 90^\circ = \boxed{\frac{\mu_0 L i_a i_b}{2\pi d}}$$

단위 길이당 힘으로 쓰면 $F/L = \mu_0 i_a i_b / 2\pi d$.



단위 길이당 힘: $F/L = \mu_0 i_1 i_2 / 2\pi d$

$\vec{L} \times \vec{B}_a$ 의 방향을 따져 보면 (그림):

평행한 전류는 서로 당기고(인력), 반평행한 전류는 서로 민다(척력).

암페어의 정의, 그리고 레일건

이 힘은 전류의 SI 단위 **암페어(ampere)** 의 뿌리다.

- 1946년 정의: 1 m 떨어진 두 무한 평행 도선에 같은 전류를 흘렸을 때 단위 길이당 힘이 $2 \times 10^{-7} \text{ N/m}$ 이 되는 전류가 1 A
- (2019년부터는 기본 전하 e 의 값을 고정하는 방식으로 재정의되었다)

같은 원리의 극단적 응용이 **레일건(rail gun)** 이다:

- 두 평행 레일에 수백만 암페어의 전류 → 레일 사이 강한 자기장
- 전류가 흐르는 발사체가 $\vec{F} = i\vec{L} \times \vec{B}$ 의 힘으로 가속
- 화약 없이 발사체를 수 km/s까지 가속할 수 있다

예제 3: 두 평행 도선 사이의 힘

두 평행 도선에 각각 $i_1 = i_2 = 10$ A의 전류가 같은 방향으로 흐르고, 간격은 $d = 2.0$ cm이다. 단위 길이당 힘을 구하라.

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi d} = \frac{(4\pi \times 10^{-7})(10)(10)}{2\pi(0.020)}$$

$$\frac{F}{L} = \frac{(2 \times 10^{-7})(100)}{0.020} = \boxed{1.0 \times 10^{-3} \text{ N/m}}$$

같은 방향이므로 **인력**이다. 1 m당 겨우 1 mN — 일상적인 전류로는 매우 작은 힘이라 평소에 느끼지 못한다. 하지만 낙뢰나 단락 사고 수준의 대전류에서는 도선을 휘게 할 만큼 커진다.

시뮬레이션: 직선 도선의 자기장 — 전류의 크기·방향을 바꾸며 자기장 벡터장과 두 도선 사이 힘 관찰

29.3 암페어 법칙

대칭성을 쓰는 지름길

전기장에서 임의의 전하 분포는 쿨롱 법칙으로 적분했지만, **대칭성** 이 좋으면 가우스 법칙으로 훨씬 쉽게 구했다. 자기장에도 같은 구조가 있다.

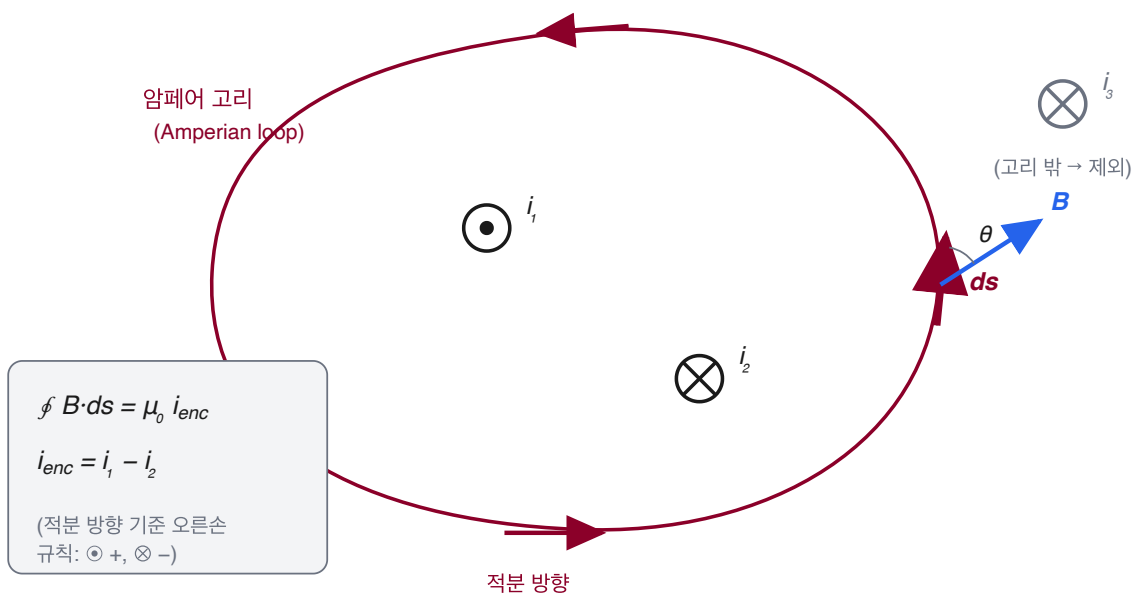
	전기장	자기장
일반 법칙 (적분)	쿨롱 법칙	비오-사바르 법칙
대칭성 지름길	가우스 법칙	암페어 법칙
기준 도형	닫힌 곡면 (가우스면)	닫힌 곡선 (암페어 고리)

가우스 법칙이 곡면을 뚫는 **선속** 을 세었다면, 암페어 법칙은 곡선을 따라 도는 **순환** 을 센다.

암페어 법칙

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{\text{enc}}$$

- 좌변: 닫힌 곡선인 **암페어 고리(Ampèrian loop)** 를 따라 $\vec{B} \cdot d\vec{s} = B \cos \theta ds$ 를 한 바퀴 적분한 것
- 우변: 고리가 **감싸는(둘러싸는) 알짜 전류** i_{enc}



고리가 감싸는 알짜 전류만 우변에 들어간다 (i_3 은 B 에는 기여하지만 적분값에는 상쇄)

고리는 실제 물체가 아니라 가우스면처럼 **마음대로 그리는 수학적 곡선** 이다.

부호 규칙과 감싼 전류

적분 방향을 정한 뒤, 감싼 전류의 부호는 오른손 법칙으로 정한다.

오른손 네 손가락을 **적분 방향** 으로 감으면, 엄지 방향의 전류는 $+$, 반대 방향은 $-$.

그림의 경우 (반시계 적분, i_1 은 $\odot$, i_2 는 $\otimes$):

$$i_{\text{enc}} = i_1 - i_2$$

- 고리 밖의 i_3 : 고리 위 각 점의 $\vec{B}$ 에는 **기여하지만**, 한 바퀴 적분하면 기여가 정확히 **상쇄** 되어 우변에 나타나지 않는다
- 적분 결과 B 가 음수로 나오면, 가정한 방향과 반대라는 뜻

적용 1: 직선 도선 외부의 장

반지름 R 인 긴 직선 도선에 전류 i 가 균일하게 흐른다. 도선 **밖** ($r > R$)의 장을 구하자.

- 대칭성: 장의 크기는 축에서 거리 r 에만 의존하고, 방향은 동심원의 접선
- 반지름 r 인 **동심원**을 암페어 고리로 잡고 $\vec{B}$ 방향으로 적분하면 $\theta = 0$:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \oint ds = B(2\pi r)$$

감싼 전류는 i 전부이므로:

$$B(2\pi r) = \mu_0 i \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}} \quad (r \geq R)$$

비오-사바르 법칙으로 힘들게 적분했던 결과가 **몇 줄 만에** 나온다!

적용 2: 직선 도선 내부의 장

이번에는 도선 **안** ($r < R$)이다. 같은 대칭성으로 반지름 r 인 동심원 고리를 잡으면 좌변은 그대로 $B(2\pi r)$.

차이는 우변이다. 전류가 단면에 **균일** 하게 퍼져 있으므로, 고리가 감싸는 전류는 넓이에 비례한다:

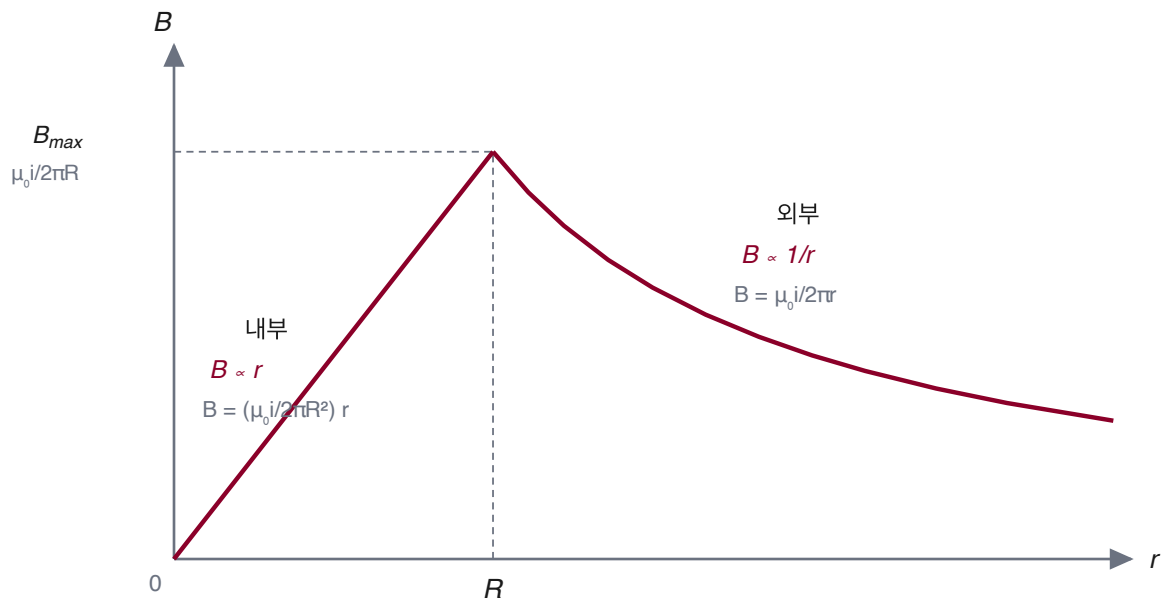
$$i_{\text{enc}} = i \frac{\pi r^2}{\pi R^2}$$

따라서:

$$B(2\pi r) = \mu_0 i \frac{r^2}{R^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi R^2} \right) r} \quad (r \leq R)$$

내부에서는 $B \propto r$: 중심에서 0이고 표면으로 갈수록 커진다.

도선 안팎의 B(r) 그래프



균일한 전류가 흐르는 반지름 R인 도선: 표면($r = R$)에서 두 식이 일치하며 B가 최대

- 내부: $B = (\mu_0 i / 2\pi R^2) r$ — 선형 증가
- 외부: $B = \mu_0 i / 2\pi r$ — 반비례 감소
- 표면 $r = R$ 에서 두 식이 만나고, 이때 B 가 **최대**

예제 4: 비균일 전류밀도 (설정)

안쪽 반지름 $a = 2.0$ cm, 바깥 반지름 $b = 4.0$ cm인 긴 도체 원통에 전류가 지면 밖으로 흐른다. 전류밀도는 $J = cr^2$ ($c = 3.0 \times 10^6$ A/m⁴)로 **비균일**하다. $r = 3.0$ cm인 점의 B 는?

- 원통 대칭 $\rightarrow$ 반지름 r 인 동심원을 암페어 고리로 사용
- 전류밀도가 비균일하므로 넓이 비례로는 **못 구하고**, 적분해야 한다
- 반지름 r' , 두께 dr' 인 얇은 고리의 넓이는 $dA = 2\pi r' dr'$

$$i_{\text{enc}} = \int_a^r J dA = \int_a^r cr'^2 (2\pi r' dr') = 2\pi c \int_a^r r'^3 dr'$$

예제 4: 비균일 전류밀도 (계산)

적분을 수행하면:

$$i_{\text{enc}} = 2\pi c \left[\frac{r'^4}{4} \right]_a^r = \frac{\pi c (r^4 - a^4)}{2}$$

암페어 법칙 $B(2\pi r) = \mu_0 i_{\text{enc}}$ 에 대입:

$$B = \frac{\mu_0 c (r^4 - a^4)}{4r} = \frac{(4\pi \times 10^{-7})(3.0 \times 10^6) [(0.030)^4 - (0.020)^4]}{4(0.030)}$$

분자의 대괄호는 $8.1 \times 10^{-7} - 1.6 \times 10^{-7} = 6.5 \times 10^{-7}$:

$$B \approx 2.0 \times 10^{-5} \text{ T} = 20 \mu\text{T}$$

29.4 솔레노이드와 토로이드

솔레노이드

도선을 촘촘하게 나선형으로 감은 긴 코일을 **솔레노이드(solenoid)** 라 한다 (길이 $\gg$ 지름).

각 감긴 도선(turn)은 자기 주위에 동심원 장을 만들고, 이들이 **중첩** 되면:

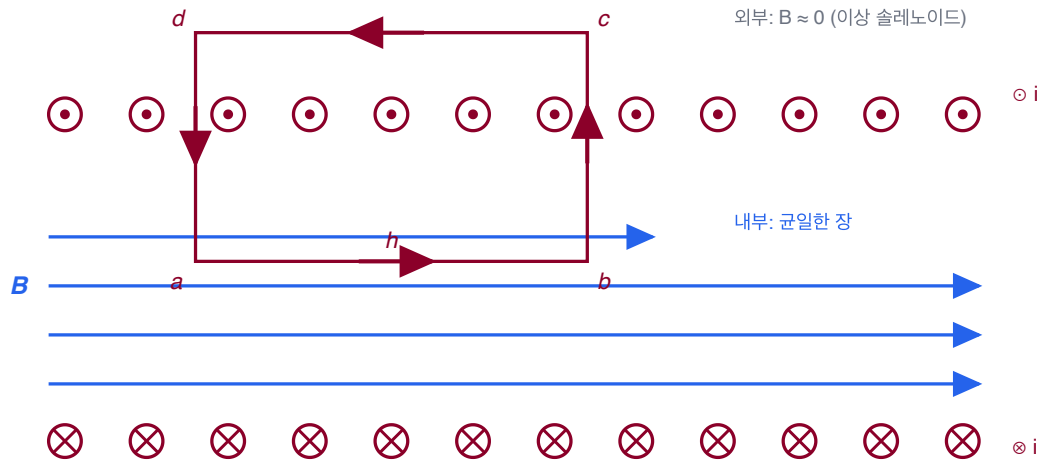
- **내부** : 이웃 도선들의 기여가 축 방향으로 정렬 $\rightarrow$ 강하고 거의 **균일한** 장
- **외부** : 위쪽 도선과 아래쪽 도선의 기여가 반대 방향 $\rightarrow$ 거의 **상쇄**

이상화한 **이상 솔레노이드(ideal solenoid)** 에서는 내부는 완전히 균일, 외부는 $B = 0$ 으로 근사한다.

축 방향은 역시 오른손 법칙: 네 손가락을 감긴 전류 방향으로 감으면 엄지가 내부 $\vec{B}$ 의 방향.

유도: 솔레노이드 내부의 장

이상 솔레노이드의 단면과 직사각형 암페어 고리



$a \rightarrow b$ 구간만 Bh 기여 ($b \rightarrow c$, $d \rightarrow a$ 는 $B \perp ds$, $c \rightarrow d$ 는 $B = 0$)

감싼 전류 = $i \cdot (nh) \rightarrow Bh = \mu_0 i n h \rightarrow B = \mu_0 i n$

직사각형 고리 $abcd$ 에 암페어 법칙을 적용하면, 네 구간의 적분은:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \underbrace{Bh}_{a \rightarrow b \text{ (내부, 나란)}} + \underbrace{0}_{b \rightarrow c (\perp)} + \underbrace{0}_{c \rightarrow d (B=0)} + \underbrace{0}_{d \rightarrow a (\perp)} = Bh$$

솔레노이드 공식

단위 길이당 감은 수를 n (turns/m)이라 하면, 길이 h 구간에 nh 번 감겨 있으므로 고리가 감싸는 전류는:

$$i_{\text{enc}} = i(nh)$$

암페어 법칙에 대입하면 $Bh = \mu_0 i n h$, 즉:

$$\boxed{B = \mu_0 i n} \quad (\text{이상 솔레노이드 내부})$$

주목할 점:

- B 는 솔레노이드의 **지름이나 길이에 무관** 하고, 단면 어디서나 같다
- 축전기가 균일한 **전기장** 을 만들듯, 솔레노이드는 균일한 **자기장** 을 만드는 실용 장치다

응용: MRI의 초전도 솔레노이드



병원의 **MRI(자기공명영상)** 장치의 원통형 터널이 바로 거대한 솔레노이드다. 초전도 도선으로 감아 1.5 ~ 3 T의 강하고 균일한 자기장을 만든다 — 지구 자기장의 **수만 배** 다.

예제 5: 솔레노이드의 자기장

길이 $L = 50$ cm에 도선을 $N = 1500$ 번 감은 솔레노이드에 전류 $i = 4.0$ A를 흘린다. 내부 자기장은?

먼저 단위 길이당 감은 수:

$$n = \frac{N}{L} = \frac{1500}{0.50} = 3000 \text{ turns/m}$$

공식에 대입:

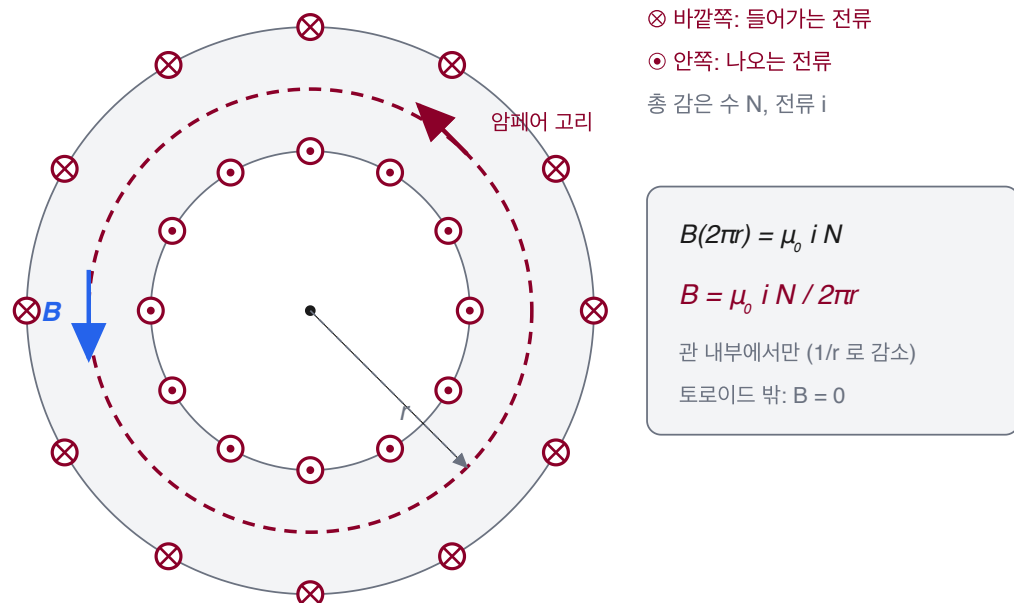
$$B = \mu_0 i n = (4\pi \times 10^{-7})(4.0)(3000)$$

$$B \approx 1.5 \times 10^{-2} \text{ T} = 15 \text{ mT}$$

지구 자기장($\sim 50 \mu\text{T}$)의 약 300배를 책상 위 크기 장치로 만들 수 있다.

토로이드

솔레노이드를 구부려 양 끝을 이어 붙인 도넛 모양 코일이 **토로이드(toroid)** 다.

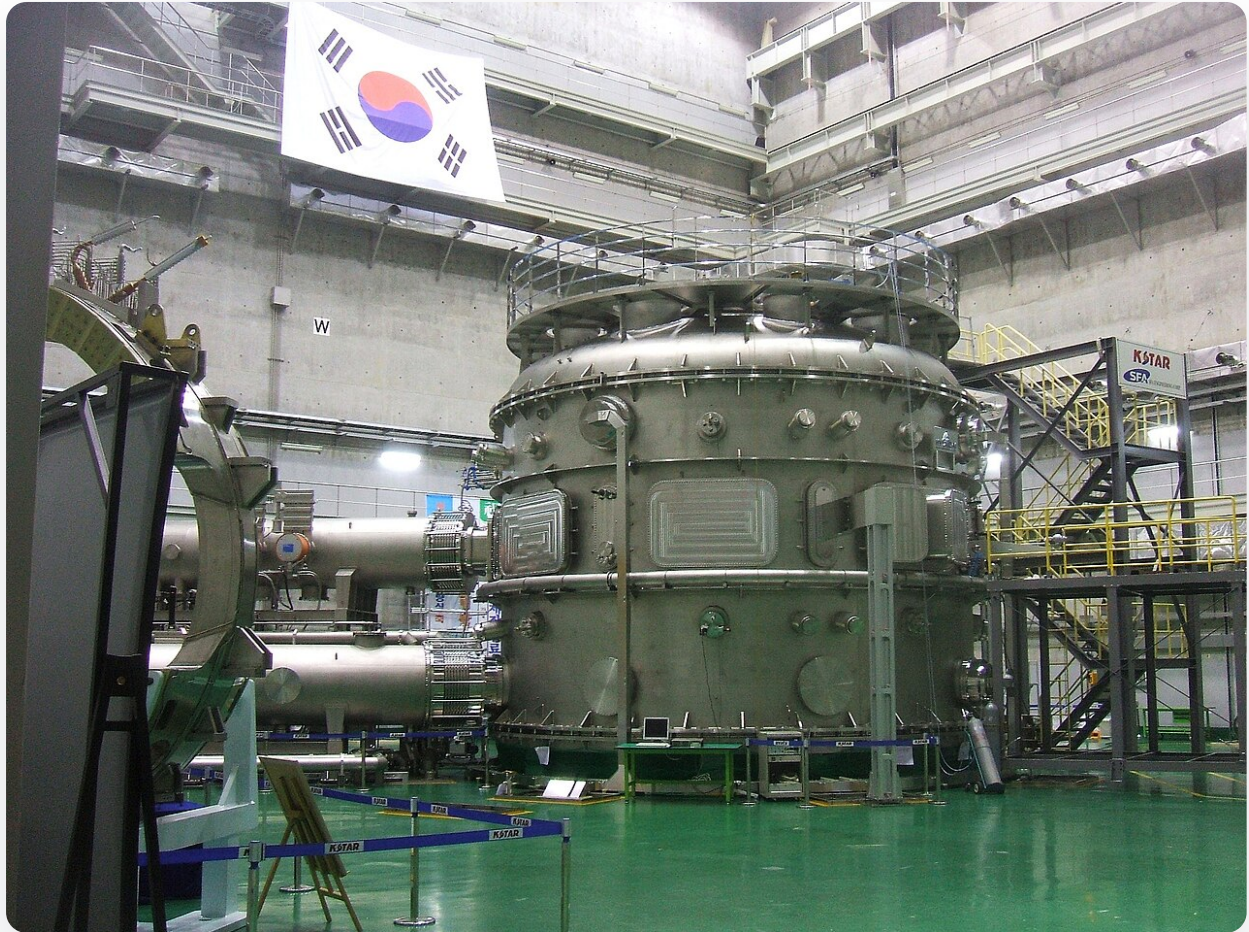


토로이드의 수평 단면: 자기력선은 관 내부를 도는 동심원 → 반지름 r 인 원을 암페어 고리로 선택

대칭성에 의해 자기력선은 관 내부를 도는 **동심원**이다. 반지름 r 인 원을 암페어 고리로 잡으면 (N = 총 감은 수):

$$B(2\pi r) = \mu_0 i N \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 i N}{2\pi} \frac{1}{r}$$

토로이드의 특징과 KSTAR



- 솔레노이드와 달리 내부 장이 **균일하지 않다** ($B \propto 1/r$: 안쪽일수록 강함)
- 관 밖(구멍 속과 바깥 모두)에서는 $B = 0$ — 자기장이 관 속에 **갇힌다**
- 이 "가두는" 성질 때문에 핵융합 장치 **토카막(tokamak)** 이 토로이드 모양이다. 사진은 대전에 있는 한국의 초전도 토카막 **KSTAR** — 1억 °C의 플라스마를 자기장으로 가둔다

29.5 전류 고리는 자기 쌍극자

복습: 코일이 받는 토크

28장에서 배웠다: 전류 고리(코일)를 외부 자기장에 넣으면 토크를 받는다.

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}, \quad \mu = NiA$$

- $\vec{\mu}$: 자기 쌍극자 모멘트(magnetic dipole moment) , 방향은 오른손 법칙 (손가락을 전류 방향으로 감으면 엄지)
- 막대자석이 나침반처럼 정렬하는 것과 같은 거동

이번에는 반대쪽 질문이다: 전류 고리는 스스로 어떤 자기장을 만드는가?

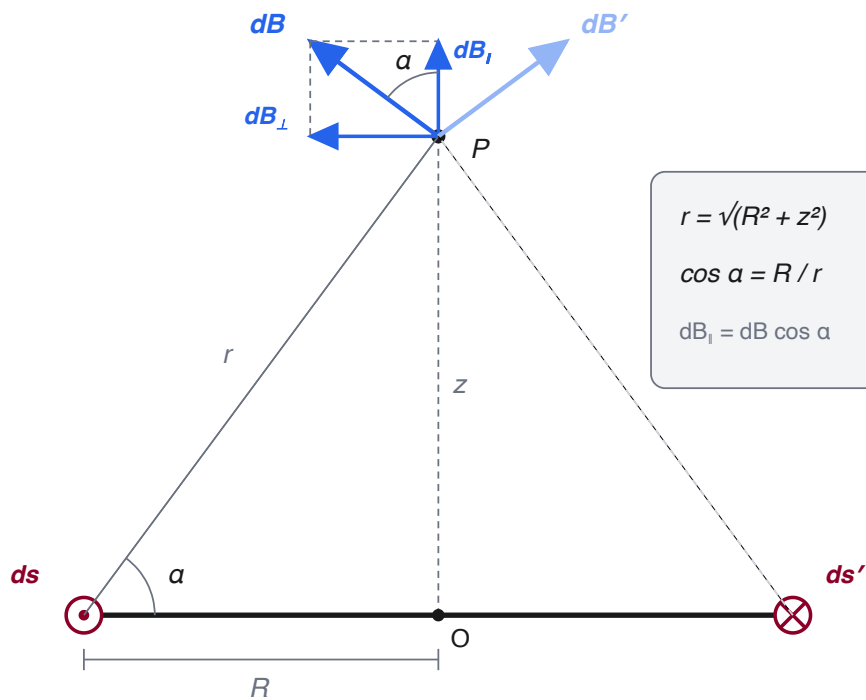
목표: 고리 축 위의 자기장

반지름 R 인 원형 고리에 전류 i 가 흐른다. 중심을 지나는 수직 축(z 축) 위, 중심에서 거리 z 인 점 P 의 자기장을 구하자.

$$B(z) = \frac{\mu_0 i R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (\text{지금부터 유도})$$

- 축 위가 아닌 일반적인 점은 대칭성이 부족해 암페어 법칙을 쓸 수 없다 → **비오-사바르 법칙** 으로 돌아간다
- 결과의 방향은 축 방향, $\vec{\mu}$ 와 같은 방향이다

유도: 고리 축 (1) — 성분 분해



마주 보는 두 요소의 수직 성분 $dB_{\perp}$ 는 상쇄 $\rightarrow$ 축 방향 성분 $dB_{\parallel}$ 만 살아남는다

- 고리 위 요소 $d\vec{s}$ 는 $\hat{r}$ 과 수직($\theta = 90^\circ$)이고, $d\vec{B}$ 는 $\hat{r}$ 에 수직인 방향
- $d\vec{B}$ 를 축 성분 $dB_{\parallel}$ 과 수직 성분 $dB_{\perp}$ 로 나누면, 마주 보는 요소끼리 $dB_{\perp}$ 가 **상쇄**
- 살아남는 것은 축 성분뿐: $B = \int dB_{\parallel}$

유도: 고리 축 (2) — 적분

비오-사바르 법칙에서 ($\sin 90^\circ = 1$):

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i ds}{r^2}, \quad dB_{\parallel} = dB \cos \alpha$$

그림의 기하에서 $r = \sqrt{R^2 + z^2}$, $\cos \alpha = R/r$ 이므로:

$$dB_{\parallel} = \frac{\mu_0 i \cos \alpha}{4\pi r^2} ds = \frac{\mu_0 i R}{4\pi (R^2 + z^2)^{3/2}} ds$$

i , R , z 는 모든 요소에 대해 같으므로 상수로 빠져나오고, $\oint ds = 2\pi R$ (둘레):

$$B = \frac{\mu_0 i R}{4\pi (R^2 + z^2)^{3/2}} (2\pi R)$$

고리 축 위의 자기장 — 결과와 검산

$$B(z) = \frac{\mu_0 i R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (\text{원형 고리의 축 위})$$

검산 1 — 중심 ($z = 0$):

$$B(0) = \frac{\mu_0 i R^2}{2R^3} = \frac{\mu_0 i}{2R}$$

원호 공식에서 $\phi = 2\pi$ 를 넣은 결과와 정확히 일치한다 ✓

검산 2 — 단위: $[\mu_0 i / R] = (\text{T} \cdot \text{m} / \text{A})(\text{A}) / \text{m} = \text{T}$ ✓

멀리서 본 고리: 쌍극자 근사

축 위 멀리 떨어진 점($z \gg R$)에서는 $R^2 + z^2 \approx z^2$ 이므로:

$$B(z) \approx \frac{\mu_0 i R^2}{2z^3}$$

$\pi R^2 = A$ (고리 넓이)를 쓰고, N 번 감은 코일로 확장하면 $\mu = NiA$:

$$B(z) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{NiA}{z^3} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mu}{z^3}$$

$\vec{B}$ 와 $\vec{\mu}$ 의 방향이 같으므로 벡터로:

$$\boxed{\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{\mu}}{z^3}} \quad (z \gg R)$$

전류 고리 = 자기 쌍극자

전류 고리를 "자기 쌍극자"라 부르는 이유가 완성되었다.

1. 외부 자기장 속에서 **토크** 를 받는다: $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$
2. 스스로 **쌍극자형 자기장** 을 만든다: $\vec{B} \propto \vec{\mu}/z^3$

전기 쌍극자와 완벽히 평행한 구조다 (22장):

	전기 쌍극자	자기 쌍극자
모멘트	$\vec{p} = q\vec{d}$	$\vec{\mu} = NiA\hat{n}$
축 위의 장	$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p}{z^3}$	$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mu}{z^3}$
외부 장 속 토크	$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$	$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$

고리의 한쪽 면은 N극, 반대쪽 면은 S극처럼 행동한다 — 사실 막대자석의 자기장도 내부 전자들의 미시적 전류 고리에서 나온다.

Review & Summary

핵심 개념

- **비오-사바르 법칙** : 전류 요소 $i d\vec{s}$ 가 만드는 자기장. 역제곱 + 벡터곱 $\rightarrow$ 장은 전류를 감아도는 방향 (오른손 법칙)
- **직선 도선** : $B \propto i/R$, 자기력선은 동심원
- **평행 전류** : 같은 방향이면 인력, 반대 방향이면 척력
- **암페어 법칙** : 고리를 따라 도는 순환 = $\mu_0 \times$ 감싼 전류. 대칭성이 좋을 때 지름길
- **솔레노이드/토로이드** : 균일한 장 / 갇힌 장을 만드는 장치
- **전류 고리 = 자기 쌍극자** : 멀리서 $B \propto \mu/z^3$

핵심 공식

상황	공식
비오-사바르 법칙	$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}, \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$
긴 직선 도선	$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$ (내부: $B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R^2} r$)
원호의 중심	$B = \frac{\mu_0 i \phi}{4\pi R}$ (ϕ 는 라디안)
평행 전류의 힘	$F/L = \frac{\mu_0 i_a i_b}{2\pi d}$ (평행 인력, 반평행 척력)
암페어 법칙	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{\text{enc}}$
솔레노이드 / 토로이드	$B = \mu_0 i n$ / $B = \frac{\mu_0 i N}{2\pi r}$

축 위의 자기 쌍극자: $\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{\mu}}{z^3} \quad (z \gg R, \mu = NiA)$