

25장: 전기용량

Capacitance

이번 장에서 배울 내용

지금까지 전하가 만드는 **전기장(electric field)** 과 **전위(electric potential)** 를 배웠다. 이번 장에서는 이 도구들을 처음으로 실용적인 **장치** 에 적용한다. 바로 **축전기(capacitor)** 다.

- 축전기는 **전하와 전기 에너지를 저장하는 장치** 다
- 전기용량이란 무엇이고, 어떻게 계산하는가 (가우스 법칙 + 전위 적분)
- 축전기 여러 개를 연결하면? (병렬·직렬)
- 저장된 에너지는 어디에 있는가 → **전기장 자체가 에너지를 담는다**
- 판 사이에 절연 물질(유전체)을 넣으면 무슨 일이 생기는가

축전기는 어디에나 있다

- **카메라 플래시** : 배터리가 못 내는 순간적인 큰 출력을 축전기가 대신 낸다
- **심장 제세동기(defibrillator)** : 축전기에 저장한 에너지로 심장에 전기 충격
- **스마트폰 터치스크린** : 손가락이 닿으면 그 지점의 전기용량이 변한다
- **DRAM 메모리** : 비트 하나하나가 아주 작은 축전기 — 전하가 있으면 1, 없으면 0



다양한 크기와 모양의 축전기들. 모두 같은 원리로 작동한다.

이번 장의 세 가지 핵심 결론

1. **전기용량(capacitance)** : 축전기의 전하와 전위차는 비례한다

$$q = CV$$

2. **전기용량은 기하학이 결정한다** : 판의 모양·크기·간격만으로 정해진다

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad (\text{평 행 판})$$

3. **에너지는 전기장에 저장된다** : 단위 부피당 에너지는

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

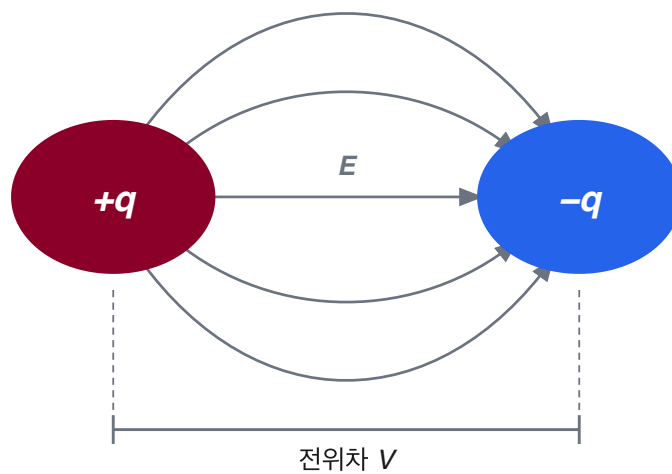
25.1 전기용량

축전기란 무엇인가

축전기(capacitor) 는 서로 절연된 **두 도체** 로 이루어진 장치다. 두 도체를 **판(plate)** 이라 부른다.

- 충전되면 두 판은 크기가 같고 부호가 반대인 전하 $+q$, $-q$ 를 갖는다
- 판의 모양은 아무래도 좋다 — 평평하지 않아도 두 도체면 축전기다

축전기: 절연된 두 도체 (판, plates)



두 판의 전하는 크기가 같고 부호가 반대 — "축전기의 전하"는 한 판의 크기 q 를 뜻한다

"축전기의 전하가 q "라는 말은 **한 판에 있는 전하의 크기**를 뜻한다. 두 판을 합친 알짜 전하는 0이다.

전하와 전위차는 비례한다

판은 도체이므로 각 판 전체가 **등전위면(equipotential surface)** 이다. 두 판 사이에는 전위차가 있고, 이를 (24장의 ΔV 대신) 관례적으로 V 로 쓴다.

축전기의 전하 q 와 전위차 V 는 서로 비례한다:

$$q = CV$$

- 비례 상수 C 가 **전기용량(capacitance)** 이다
- C 는 판의 **기하학적 구조** (모양, 크기, 간격)에만 의존하고, q 나 V 에는 의존하지 않는다
- 같은 전위차 V 에서 C 가 클수록 더 많은 전하를 저장한다 — "전하를 담는 그릇의 크기"

전기용량의 단위: 패럿

$$1 \text{ 패럿(farad)} = 1 \text{ F} = 1 \text{ C/V}$$

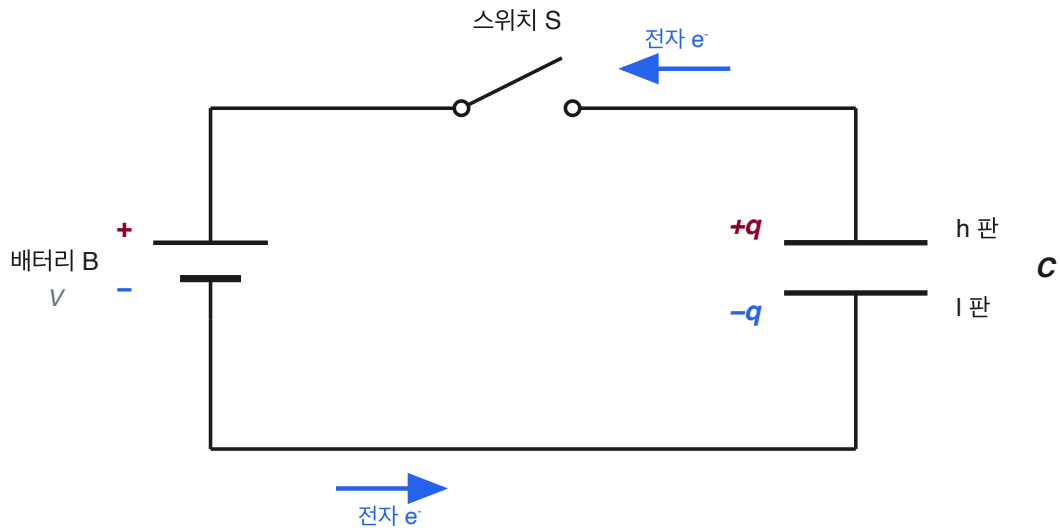
전자기 연구의 선구자 마이클 패러데이(Michael Faraday)의 이름을 땄다.

- 1 F는 **엄청나게 큰** 단위다. 실제 회로에서는 보조 단위를 쓴다:
 - 마이크로패럿 $1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$
 - 피코패럿 $1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$
- 전자회로 기판의 축전기는 대부분 pF ~ μF 수준
- 예외적으로 **슈퍼커패시터(supercapacitor)**는 수천 F까지 가능 (단, 낮은 전압에서만)

축전기의 충전

축전기를 충전하는 가장 간단한 방법: **배터리** 가 있는 회로에 넣는 것.

축전기 충전 회로: 배터리 B + 스위치 S + 축전기 C



스위치를 닫으면 전자가 h판 → +단자, -단자 → l판으로 이동. 판의 전위차가 V 가 되면 멈춘다

- 배터리는 내부 화학 반응으로 두 단자 사이의 전위차 V 를 유지하는 장치
- 스위치를 닫으면 배터리가 도선에 만드는 전기장이 전도 전자를 민다
- h 판의 전자는 +단자 쪽으로 빠져나가고 (h 판은 $+q$), -단자에서 나온 전자는 l 판에 쌓인다 ($-q$)

충전은 언제 멈추는가

전하가 쌓일수록 판 사이의 전위차가 커진다.

- 처음: 판이 중성, 판 사이 전위차 0
- 충전 중: 판의 전하 $\pm q$ 증가 $\rightarrow$ 전위차 증가
- 판의 전위차가 배터리의 전위차 V 와 같아지면 $\rightarrow$ 도선에 알짜 전기장이 사라져 전자 이동이 **멈춘다**

이 상태를 **완전히 충전(fully charged)** 되었다고 하며, 이때 $q = CV$ 가 성립한다.

스위치를 다시 열어도 전하는 갈 곳이 없으므로 (이상적으로는) 계속 저장된다. 축전기를 전하 **저장** 장치라 부르는 이유다.

25.2 전기용량 계산하기

계산 전략: 네 단계

어떤 모양의 축전기든 전기용량은 똑같은 순서로 구한다.

1. 판에 전하 $\pm q$ 가 있다고 **가정** 한다
2. **가우스 법칙** 으로 판 사이의 전기장 $\vec{E}$ 를 구한다
3. $\vec{E}$ 를 경로 적분하여 판 사이의 전위차 V 를 구한다
4. $C = q/V$ 로 전기용량을 얻는다

마지막에 C 는 반드시 q 가 약분되어 사라지고 **기하학적 양들만 남는다**. 그래야 "전기용량은 기하가 결정한다"는 말과 맞는다.

두 가지 도구

도구 1 — 가우스 법칙 (23장) : 양(+)판의 전하를 둘러싸는 가우스면을 잡는다. 플럭스가 통과하는 면에서 $\vec{E}$ 가 균일하고 면에 수직이 되도록 잡으면:

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q \quad \Rightarrow \quad q = \varepsilon_0 E A$$

도구 2 — 전위차 (24장) : $V_f - V_i = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$. 경로를 음(-)판에서 양(+)판으로, 전기력선을 거슬러 가도록 잡으면 $\vec{E} \cdot d\vec{s} = -E ds$ 가 되어:

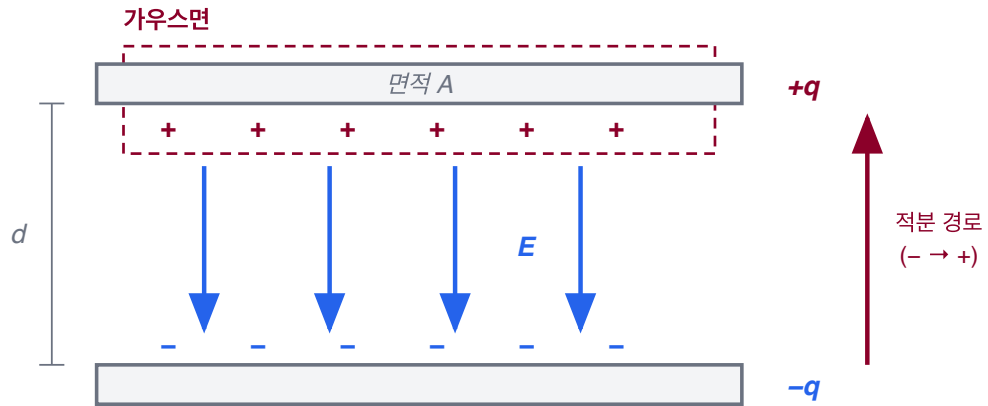
$$V \equiv V_+ - V_- = \int_-^+ E ds$$

적분 기호의 $-$, $+$ 는 경로의 시작(음판)과 끝(양판)을 뜻한다.

평행판 축전기

가장 기본적인 축전기: 면적 A 인 두 판이 간격 d 로 마주 본다.

평행판 축전기: 가우스면과 적분 경로



가우스면(빨강 점선): $q = \epsilon_0 EA$, 적분 경로(빨강 화살표): $V = \int E \, ds = Ed$

판이 충분히 크고 가까우면 가장자리 휘어짐(fringing)은 무시할 수 있다

판이 충분히 크고 서로 가깝다면 ($d \ll \sqrt{A}$), 가장자리에서 장이 휘는 **가장자리 효과 (fringing)**를 무시할 수 있다. 그러면 판 사이의 $\vec{E}$ 는 어디서나 균일하다.

평행판: 전기장 구하기

윗판(+ q)을 둘러싸는 납작한 상자 모양 가우스면을 잡는다.

- 전기장은 판 사이 영역에만 있고, 가우스면의 **아랫면** 만 통과한다
- 아랫면에서 $\vec{E}$ 는 균일하고 면에 수직

$$q = \varepsilon_0 E A$$

즉 $E = q/\varepsilon_0 A$. 이는 23장에서 배운 도체 표면의 장 $E = \sigma/\varepsilon_0$ (여기서 $\sigma = q/A$)와 같은 결과다.

평행판: 전위차와 전기용량

음(-)판에서 양(+)판으로 곧장 올라가는 경로로 적분한다. E 가 상수이므로:

$$V = \int_{-}^{+} E ds = E \int_0^d ds = Ed$$

이제 $q = \varepsilon_0 EA$ 와 $V = Ed$ 를 정의 $q = CV$ 에 넣으면:

$$C = \frac{q}{V} = \frac{\varepsilon_0 EA}{Ed}$$

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}} \quad (\text{평행판 축전기})$$

E 와 q 가 모두 사라지고 기하학적 양 A , d 만 남았다.

$C = \epsilon_0 A/d$ 읽기

- 판 면적 A 가 **클수록** C 증가 — 전하를 얻을 자리가 넓다
- 판 간격 d 가 **작을수록** C 증가 — 반대 전하가 가까워서 서로를 붙잡는다
- 쿨롱 법칙의 상수를 k 대신 $1/4\pi\epsilon_0$ 로 쓴 이유 중 하나: 실용적인 이 공식이 깔끔해진다
 ϵ_0 를 축전기에 어울리는 단위로 다시 쓰면:

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m} = 8.85 \text{ pF/m}$$

수치 감각: $A = 1 \text{ cm}^2$, $d = 1 \text{ mm}$ 면 $C \approx 0.9 \text{ pF}$. 일상 크기의 평행판으로는 pF 수준이 고작이다.

예제: 평행판 축전기

판 면적 $A = 25 \text{ cm}^2$, 간격 $d = 1.0 \text{ mm}$ 인 평행판 축전기를 600 V 전원에 연결했다. C , q , E 를 구하라.

단위 변환: $A = 25 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, $d = 1.0 \times 10^{-3} \text{ m}$.

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{(8.85 \times 10^{-12})(25 \times 10^{-4})}{1.0 \times 10^{-3}} \approx 22 \text{ pF}$$

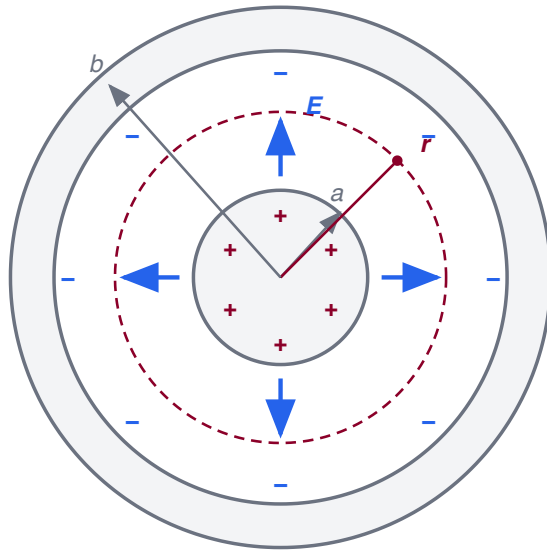
$$q = CV = (22 \times 10^{-12})(600) \approx 1.3 \times 10^{-8} \text{ C} = 13 \text{ nC}$$

$$E = \frac{V}{d} = \frac{600}{1.0 \times 10^{-3}} = 6.0 \times 10^5 \text{ V/m}$$

공기의 절연 내력($\approx 3 \times 10^6 \text{ V/m}$)보다 작으므로 스파크 없이 버틴다.

원통형 축전기

원통형 축전기 (축에 수직인 단면)



길이 L (지면에 수직, $L \gg b$)

안쪽 도체(반지름 a): 전하 $+q$

바깥 도체(반지름 b): 전하 $-q$

빨강 점선: 반지름 r 인 원통형
가우스면 ($a < r < b$)

파랑 화살표: 지름 방향 전기장

$$\text{가우스 법칙: } q = \epsilon_0 E (2\pi r L) \rightarrow E = q / (2\pi \epsilon_0 L r)$$

길이 L , 반지름 a 인 안쪽 도체($+q$)와 반지름 b 인 바깥 원통($-q$)이 동축으로 놓여 있다.
 $L \gg b$ 이면 끝부분의 fringing을 무시할 수 있다. 동축 케이블이 바로 이 구조다.

원통형: 전기장 구하기

반지름 r ($a < r < b$), 길이 L 인 동축 원통을 가우스면으로 잡는다.

- 대칭에 의해 $\vec{E}$ 는 지름 방향, 크기는 옆면 위에서 일정
- 플럭스는 옆면(넓이 $2\pi rL$)으로만 나간다 (양 끝 뚜껑에는 플럭스 없음)

$$q = \varepsilon_0 E A = \varepsilon_0 E (2\pi r L)$$

$$E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L r}$$

장이 $1/r$ 로 감소한다 — 23장의 선전하 결과와 같은 모양이다.

원통형: 전위차와 전기용량

음(바깥)판에서 양(안쪽)판으로, 반지름을 따라 **안쪽으로** 들어가는 경로를 잡는다. 이때 $ds = -dr$ 이므로:

$$V = \int_{-}^{+} E ds = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0 L} \int_b^a \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{b}{a}$$

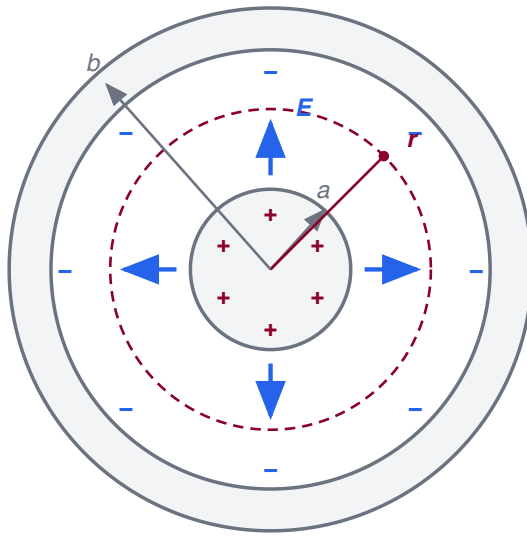
$C = q/V$ 에서 q 가 약분되고:

$$\boxed{C = 2\pi\epsilon_0 \frac{L}{\ln(b/a)}} \quad (\text{원통형 축전기})$$

길이 L 과 반지름 비 b/a — 역시 기하학만 남는다.

구형 축전기

구형 축전기 (중심을 지나는 단면)



동심(concentric) 구 껍질 두 개

안쪽 껍질(반지름 a): 전하 $+q$

바깥 껍질(반지름 b): 전하 $-q$

빨강 점선: 반지름 r 인 구형
가우스면 ($a < r < b$)

전기장은 지름 방향, 구 대칭

$$\text{가우스 법칙: } q = \epsilon_0 E (4\pi r^2) \rightarrow E = q / (4\pi \epsilon_0 r^2)$$

반지름 $a(+q)$, $b(-q)$ 인 동심 구 껍질 두 개. 반지름 r 인 구를 가우스면으로 잡으면 (넓이 $4\pi r^2$):

$$q = \epsilon_0 E (4\pi r^2) \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

껍질 정리 그대로 — 안쪽 구가 점전하처럼 보인다.

구형: 전위차와 전기용량

같은 방식으로 바깥(-)에서 안쪽(+)으로 적분한다 ($ds = -dr$):

$$V = \int_{-}^{+} E ds = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_b^a \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{b-a}{ab}$$

$$\boxed{C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}} \quad (\text{구형 축전기})$$

간격 $b - a$ 가 좁을수록 C 가 커진다 — 평행판의 d 와 같은 역할이다.

고립된 구의 전기용량

도체 구 **하나** 에도 전기용량을 정의할 수 있다. "없어진 반대쪽 판"을 반지름 무한대의 구라고 생각하면 된다 (전기력선은 결국 어딘가에서 끝난다).

구형 축전기 공식을 다시 쓰고 $b \rightarrow \infty, a \rightarrow R$:

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{a}{1 - a/b} \xrightarrow{b \rightarrow \infty} \boxed{C = 4\pi\epsilon_0 R}$$

- 지구 전체($R = 6.4 \times 10^6$ m)의 전기용량: $C \approx 7 \times 10^{-4}$ F — 겨우 0.7 mF!
- $C = 1$ F인 도체 구의 반지름은 $R = 9 \times 10^9$ m, **태양 반지름의 약 13배**. 1 F가 얼마나 큰 단위인지 알 수 있다.

네 가지 결과의 공통 구조

축전기	전기용량
평행판	$C = \epsilon_0 A/d$
원통형	$C = 2\pi\epsilon_0 L/\ln(b/a)$
구형	$C = 4\pi\epsilon_0 ab/(b - a)$
고립된 구	$C = 4\pi\epsilon_0 R$

모두 다음 꼴이다:

$$C = \epsilon_0 \times (\text{길이 차원의 기하학적 양})$$

전기용량에 q 도 V 도 등장하지 않는다. **축전기를 만들면 그 순간 C 는 정해진다.**

개념 확인

배터리에 연결된 채로 (V 일정) 다음과 같이 바꾸면, 저장된 전하 $q = CV$ 는 어떻게 되는가?

1. 평행판의 간격 d 를 **늘리면** ? $\rightarrow C = \varepsilon_0 A/d$ 감소 $\rightarrow q$ **감소**

2. 원통형의 안쪽 반지름 a 를 **키우면** ? $\rightarrow \ln(b/a)$ 감소 $\rightarrow C$ 증가 $\rightarrow q$ **증가**

3. 구형의 바깥 반지름 b 를 **키우면** ? $\rightarrow \frac{ab}{b-a} = \frac{a}{1-a/b}$ 감소 $\rightarrow C$ 감소 $\rightarrow q$ **감소**

간격이 좁아질수록, 두 판이 가까워질수록 전기용량은 커진다.

25.3 병렬 연결과 직렬 연결

등가 축전기

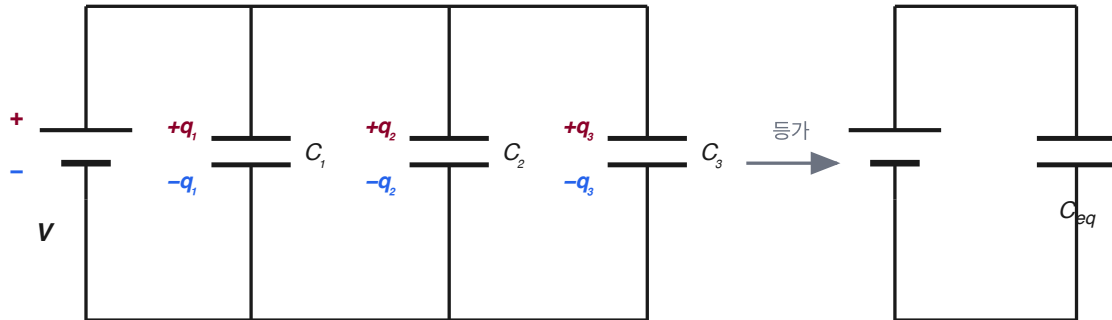
회로에 축전기가 여러 개 있으면, 조합 전체를 **등가 축전기(equivalent capacitor)** 하나로 바꿔 생각할 수 있다.

- 등가 축전기: 실제 조합과 **같은 전하 q 와 같은 전위차 V** 를 갖는 가상의 축전기 하나
- 복잡한 회로를 단계적으로 단순화하는 강력한 도구

기본 조합은 두 가지뿐이다: **병렬(parallel)**과 **직렬(series)**. 이 둘만 정확히 구분하면 대부분의 회로를 풀 수 있다.

병렬 연결: 같은 V

병렬 연결: 모든 축전기에 같은 전위차 V ("par- V ")



위 판들은 모두 + 단자에, 아래 판들은 모두 - 단자에 직접 연결 → 전위차가 모두 V 로 같다

$$\text{총 전하 } q = q_1 + q_2 + q_3 \rightarrow C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 + C_3$$

병렬 : 한쪽 판들끼리 직접 연결되고, 반대쪽 판들끼리도 직접 연결된 상태. 그 양단에 전위차 V 를 걸면 **각 축전기에 똑같은 V** 가 걸린다. (기억법: "par- V ")

병렬: 등가용량 유도

각 축전기의 전하는 $q = CV$ 에서:

$$q_1 = C_1 V, \quad q_2 = C_2 V, \quad q_3 = C_3 V$$

조합 전체에 저장된 총 전하:

$$q = q_1 + q_2 + q_3 = (C_1 + C_2 + C_3)V$$

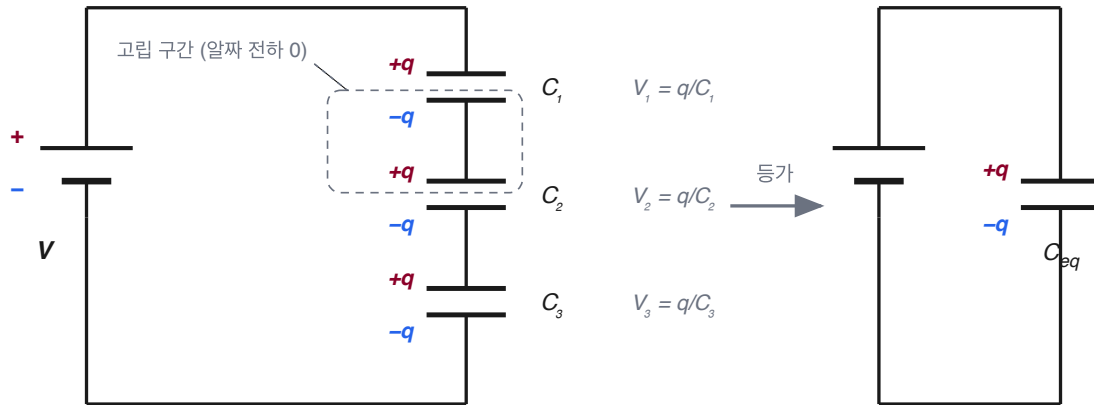
같은 q, V 를 갖는 등가 축전기의 전기용량은:

$$C_{\text{eq}} = \frac{q}{V} = C_1 + C_2 + C_3 \quad \Rightarrow \quad C_{\text{eq}} = \sum_{j=1}^n C_j$$

병렬 연결은 사실상 **판 면적을 합치는 것**이다. C_{eq} 는 항상 가장 큰 C_j 보다 크다.

직렬 연결: 같은 q

직렬 연결: 모든 축전기에 같은 전하 q ("seri-q")



배터리는 양 끝 판만 직접 대전시키고, 중간 판들은 유도로 대전된다 → 전하가 모두 q 로 같다

$$V = V_1 + V_2 + V_3 \rightarrow 1/C_{eq} = 1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3$$

직렬 : 축전기들이 한 줄로 이어져 있고, 그 줄의 양 끝에 전위차 V 가 걸린 상태. 이때 **각 축전기에 똑같은 전하 q** 가 저장된다. (기억법: "seri-q")

직렬: 왜 전하가 모두 같은가

배터리가 직접 대전시키는 것은 **줄의 양 끝 판 두 장뿐** 이다.

- 배터리가 맨 아래 판에 $-q$ 를 놓으면, 그 판이 같은 축전기의 반대 판 전자를 밀어내 $+q$ 로 만든다
- 밀려난 전자는 도선을 타고 이웃 축전기의 판으로 가 $-q$ 를 만든다 → **연쇄 반응**
- 중간의 "판 두 장 + 도선" 구간은 전기적으로 **고립** 되어 있어 알짜 전하가 0으로 유지된다: 한쪽이 $+q$ 면 반대쪽은 정확히 $-q$

주의: 전하가 이동할 경로가 **하나뿐** 이어야 직렬이다. 중간에 갈림길이 있으면 직렬이 아니다.

직렬: 등가용량 유도

각 축전기의 전위차는 $V = q/C$ 에서:

$$V_1 = \frac{q}{C_1}, \quad V_2 = \frac{q}{C_2}, \quad V_3 = \frac{q}{C_3}$$

전체 전위차는 각 전위차의 합:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right)$$

$$C_{\text{eq}} = \frac{q}{V} = \frac{1}{1/C_1 + 1/C_2 + 1/C_3} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{C_j}}$$

직렬의 C_{eq} 는 항상 **가장 작은 C_j 보다도 작다.**

병렬 vs 직렬 정리

	병렬 (parallel)	직렬 (series)
모든 축전기에 같은 것	전위차 V	전하 q
등가용량	$C_{eq} = \sum C_j$	$1/C_{eq} = \sum 1/C_j$
C_{eq} 크기	가장 큰 C 보다 크다	가장 작은 C 보다 작다
기억법	par-V	seri-q

판별 요령: 두 축전기 사이에서 이동하는 전하가 **한 길로만** 갈 수 있으면 직렬, 두 판이 **직접 도선으로** 묶여 같은 전위차를 공유하면 병렬.

예제: 병렬 + 직렬 조합 (1)

$C_1 = 12.0 \mu\text{F}$ 와 $C_2 = 5.30 \mu\text{F}$ 는 서로 **병렬**로 묶여 있고, 이 조합이 $C_3 = 4.50 \mu\text{F}$ 와 **직렬**로 배터리($V = 12.5 \text{ V}$)에 연결되어 있다. 등가용량을 구하라.

1단계 – 병렬 부분 (C_1, C_2):

$$C_{12} = C_1 + C_2 = 12.0 + 5.30 = 17.3 \mu\text{F}$$

2단계 – C_{12} 와 C_3 의 직렬:

$$\frac{1}{C_{123}} = \frac{1}{17.3} + \frac{1}{4.50} = 0.280 \mu\text{F}^{-1}$$

$$\boxed{C_{123} = 3.57 \mu\text{F}}$$

예제: 병렬 + 직렬 조합 (2)

같은 회로에서 C_1 에 저장된 전하 q_1 은? — 등가에서 **거꾸로** 되짚어 간다.

전체 전하 ($V = 12.5$ V가 등가 축전기에 걸림):

$$q_{123} = C_{123}V = (3.57 \mu\text{F})(12.5 \text{ V}) = 44.6 \mu\text{C}$$

직렬은 같은 q (seri-q) $\rightarrow q_{12} = q_3 = 44.6 \mu\text{C}$. 병렬 조합의 전위차:

$$V_{12} = \frac{q_{12}}{C_{12}} = \frac{44.6 \mu\text{C}}{17.3 \mu\text{F}} = 2.58 \text{ V}$$

병렬은 같은 V (par-V) $\rightarrow V_1 = 2.58$ V:

$$q_1 = C_1 V_1 = (12.0 \mu\text{F})(2.58 \text{ V}) = 31.0 \mu\text{C}$$

검산: $V_3 = 44.6/4.50 = 9.92$ V이고 $V_{12} + V_3 = 2.58 + 9.92 = 12.5$ V ✓

예제: 축전기가 축전기를 충전한다 (1)

$C_1 = 3.55 \mu\text{F}$ 를 $V_0 = 6.30 \text{ V}$ 로 충전한 뒤 **배터리를 제거** 하고, 충전 안 된 $C_2 = 8.95 \mu\text{F}$ 에 연결했다. 평형에 도달하면 각 축전기의 전하는?

주의: 이 상황은 직렬도 병렬도 **아니다**. 배터리가 없고, 이미 있던 전하가 재분배될 뿐이다.

- 처음 전하: $q_0 = C_1 V_0 = (3.55 \mu\text{F})(6.30 \text{ V}) = 22.4 \mu\text{C}$
- 스위치를 닫으면 C_1 의 전하 일부가 C_2 로 흘러간다
- 흐름이 멈추는 조건: 두 축전기의 **전위차가 같아질 때**

$$V_1 = V_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2}$$

예제: 축전기가 축전기를 충전한다 (2)

전하 보존 : 전하는 마법처럼 사라지지 않는다.

$$q_1 + q_2 = q_0$$

두 식을 연립하면 ($q_2 = q_0 - q_1$ 대입):

$$\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_0 - q_1}{C_2} \Rightarrow q_1 = q_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2} = (22.4) \frac{3.55}{12.50}$$

$$q_1 \approx 6.35 \mu\text{C}, \quad q_2 = q_0 - q_1 \approx 16.0 \mu\text{C}$$

공통 전위차는 $V = q_1/C_1 = 6.35/3.55 = 1.79 \text{ V}$. 검산: $q_2/C_2 = 16.0/8.95 = 1.79 \text{ V} \checkmark$

전하는 전기용량에 **비례해서** 나뉜다 — 큰 그릇이 더 많이 가져간다.

25.4 전기장에 저장된 에너지

축전기를 충전하려면 일이 필요하다

전하를 한 판에서 다른 판으로 옮기는 과정을 상상하자.

- 처음에는 판이 중성이라 전하를 옮기는 데 일이 들지 않는다
- 전하가 쌓일수록, 이미 쌓인 전하가 새로 오는 전하를 **밀어낸다**
- 전하가 많아질수록 옮기는 데 점점 더 큰 일이 필요하다

실제로는 배터리가 화학 에너지를 소모하며 이 일을 해 준다. 그 일은 어디로 갔을까? — 축전기에 **전기 퍼텐셜 에너지 U** 로 저장되고, 방전시키면 되찾을 수 있다.

유도: $U = q^2/2C$

충전 도중 어느 순간, 이미 옮겨진 전하가 q' 이라 하자. 그 순간 판 사이 전위차는 $V' = q'/C$ 이다.

여기서 전하 dq' 을 추가로 옮기는 데 필요한 일은 (24장: $dW = V dq$):

$$dW = V' dq' = \frac{q'}{C} dq'$$

전하 0에서 최종 전하 q 까지 쌓는 전체 일:

$$W = \int dW = \frac{1}{C} \int_0^q q' dq' = \frac{q^2}{2C}$$

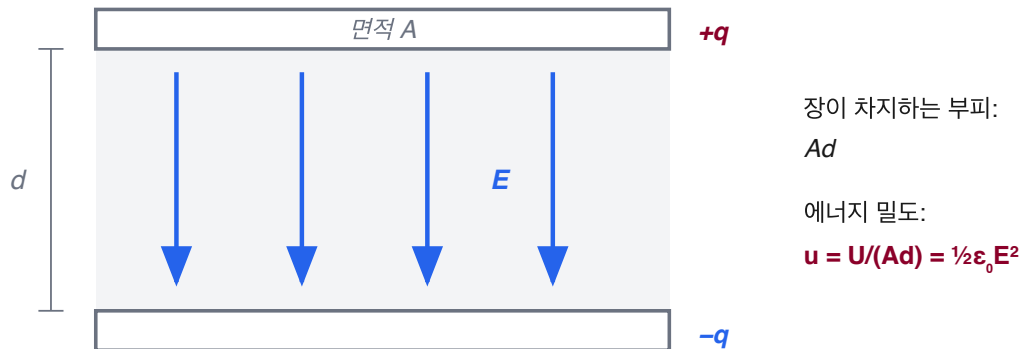
이 일이 퍼텐셜 에너지로 저장된다. $q = CV$ 를 대입한 형태와 함께:

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2$$

축전기의 모양과 무관하게 성립한다.

에너지는 어디에 있는가

에너지는 판 사이의 전기장에 저장된다



회색 영역(부피 Ad)에 균일한 전기장 E 가 있고, 총 에너지 $U = \frac{1}{2}CV^2$ 가 이 장에 담겨 있다

$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ 는 평행판에서 유도했지만, 모든 전기장에 대해 성립한다

사고 실험: 같은 전하 q 를 가진 두 평행판 축전기, 단 하나는 간격이 2배.

- 간격 2배 $\rightarrow$ 판 사이 부피 2배, C 는 절반 $\rightarrow U = q^2/2C$ 는 **2배**
- 그런데 전기장은 $E = q/\epsilon_0 A$ 로 **둘이 똑같다**
- 장은 같은데 장이 차지하는 부피가 2배인 쪽이 에너지도 2배

$\rightarrow$ 에너지가 **전기장이 차지하는 공간**에 비례해 저장된다고 보는 것이 자연스럽다.

에너지 밀도: $u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$

평행판 사이에서는 장이 균일하므로, 단위 부피당 에너지인 **에너지 밀도(energy density)** u 도 균일하다. 판 사이 부피는 Ad :

$$u = \frac{U}{Ad} = \frac{CV^2}{2Ad} = \frac{\epsilon_0 A}{d} \cdot \frac{V^2}{2Ad} = \frac{1}{2}\epsilon_0 \left(\frac{V}{d}\right)^2$$

그런데 V/d 는 바로 전기장의 크기 E 이다:

$$\boxed{u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2} \quad (\text{에너지 밀도})$$

평행판으로 유도했지만 이 결과는 **모든 전기장에 대해 일반적으로 성립한다**. 전기장이 있는 곳이라면 어디든, 그 공간 자체가 에너지를 담고 있다.

예제: 저장 에너지와 에너지 밀도

앞의 평행판 축전기($C = 22 \text{ pF}$, $V = 600 \text{ V}$, $A = 25 \text{ cm}^2$, $d = 1.0 \text{ mm}$)로 돌아가자.

저장된 에너지:

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}(22 \times 10^{-12})(600)^2 \approx 4.0 \mu\text{J}$$

에너지 밀도 ($E = 6.0 \times 10^5 \text{ V/m}$):

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}(8.85 \times 10^{-12})(6.0 \times 10^5)^2 \approx 1.6 \text{ J/m}^3$$

검산: 판 사이 부피는 $Ad = (25 \times 10^{-4})(1.0 \times 10^{-3}) = 2.5 \times 10^{-6} \text{ m}^3$ 이고

$$U = u(Ad) = (1.6)(2.5 \times 10^{-6}) \approx 4.0 \mu\text{J}$$

두 방법이 일치한다 ✓

실생활: 순간적인 큰 출력



축전기의 진짜 장기는 에너지를 **아주 짧은 시간에** 쏟아내는 것이다.

- **제세동기** : 약 $70 \mu\text{F}$ 를 5000 V 로 충전 $\rightarrow U = \frac{1}{2}(70 \times 10^{-6})(5000)^2 \approx 900 \text{ J}$. 이 중 일부를 수 ms 만에 방출 — 순간 출력이 수십 kW
- **카메라 플래시** : 수백 μF 를 $\sim 300 \text{ V}$ 로 충전 (수 J) $\rightarrow 1 \text{ ms}$ 만에 방출
- 배터리는 에너지 총량은 크지만 천천히만 내놓는다. 축전기는 그 반대다

25.5 유전체가 든 축전기

패러데이의 발견

판 사이의 빈 공간을 **유전체(dielectric)** — 광물성 기름, 플라스틱 같은 절연 물질 — 로 채우면 어떻게 될까?

1837년 패러데이가 실험으로 답했다:

$$C = \kappa C_{\text{air}}$$

- 전기용량이 κ 배로 **증가** 한다
- κ 는 **유전 상수(dielectric constant)** : 물질마다 정해진 1보다 큰 수
- 실제 축전기의 판 사이에 절연지·세라믹·산화막이 들어 있는 이유: C 를 키우고, 판 간격을 좁게 유지하면서도 판끼리 닿지 않게 한다

유전 상수와 절연 내력

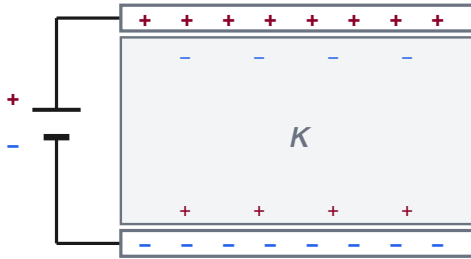
물질	유전 상수 κ
진공	1 (정의)
공기 (1기압)	1.00054
종이	3.5
파이렉스 유리	4.7
물 (25°C)	78.5
티탄산 스트론튬	310

또 하나의 이점 — **절연 내력(dielectric strength)** : 물질이 절연 파괴 없이 견디는 최대 전기장. 공기는 3 kV/mm지만 종이는 16 kV/mm. 유전체를 넣으면 C 도 커지고 더 높은 전압까지 견딘다. 한계 전압 V_{max} 를 넘으면 **절연 파괴(breakdown)**로 스파크가 튜다.

유전체 삽입: 두 가지 경우

유전체 삽입: 배터리 연결 여부에 따라 달라지는 결과

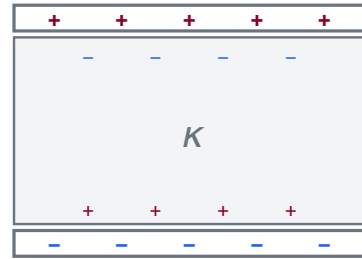
(a) 배터리 연결 유지 — V 고정



전하 증가: $q = \kappa q_0$

배터리가 추가 전하를 공급한다

(b) 배터리 분리 — q 고정



전위차 감소: $V = V_0/\kappa$

전하가 이동할 길이 없어 q 는 그대로

어느 경우든 $C = q/V$ 는 κ 배로 커진다: $C = \kappa C_0$

작은 -, + 기호: 유전체 표면에 생기는 유도 전하 (분극의 결과)

- **배터리 연결 유지** (V 고정): 유전체를 넣으면 전하가 $q = \kappa q_0$ 로 **증가** — 부족한 전하를 배터리가 공급
- **배터리 분리** (q 고정): 전하는 갈 곳이 없다. 대신 전위차가 $V = V_0/\kappa$ 로 **감소**
 $q = CV$ 로 보면 두 관찰 모두 같은 결론이다: C 가 κ 배로 커졌다.

규칙: $\epsilon_0 \rightarrow \kappa\epsilon_0$

q 고정 실험에서 $V = Ed$ 가 $1/\kappa$ 로 줄었다는 것은, 판 사이 **전기장이 $E = E_0/\kappa$ 로 약해졌다**는 뜻이다. 그래서:

$$C = \frac{q}{V} = \frac{q}{V_0/\kappa} = \kappa \frac{q}{V_0} = \kappa C_0$$

일반화하면:

유전 상수 κ 인 물질로 완전히 채워진 영역에서는, ϵ_0 가 들어가는 모든 정전기 공식에서 ϵ_0 를 $\kappa\epsilon_0$ 로 바꾸면 된다.

$$E = \frac{1}{4\pi\kappa\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \text{ (점 전 하)}, \quad E = \frac{\sigma}{\kappa\epsilon_0} \text{ (도체 표면)}, \quad C = \frac{\kappa\epsilon_0 A}{d} \text{ (평 행 판)}$$

고정된 전하가 만드는 장은 유전체 안에서 항상 **약해진다**.

시뮬레이션: 평행판 축전기 실험실 — 면적 A , 간격 d , 유전 상수 κ , 배터리 연결/분리에 따른 C , q , V , E , U 의 변화

예제: 유전체 삽입과 에너지

$C = 13.5$ pF인 축전기를 $V = 12.5$ V로 충전한 뒤 **배터리를 분리** 하고, $\kappa = 6.50$ 인 자기(porcelain) 판을 판 사이에 끼워 넣었다.

(a) 삽입 전 에너지:

$$U_i = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}(13.5 \times 10^{-12})(12.5)^2 \approx 1055 \text{ pJ}$$

(b) 삽입 후: 배터리가 없으므로 q 는 그대로다. 에너지는 q 가 든 식으로 쓰는 것이 안전하다. 전기용량이 κC 가 되므로:

$$U_f = \frac{q^2}{2\kappa C} = \frac{U_i}{\kappa} = \frac{1055 \text{ pJ}}{6.50} \approx \boxed{162 \text{ pJ}}$$

에너지가 $1/\kappa$ 로 **줄었다**. 사라진 에너지는 어디로 갔을까?

사라진 에너지의 행방

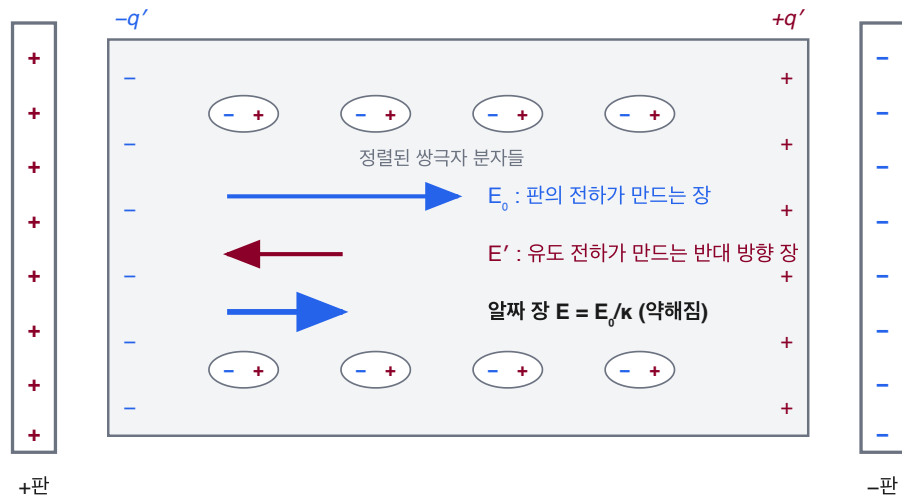
$$W = U_i - U_f = 1055 - 162 = 893 \text{ pJ}$$

- 이 에너지는 슬라브를 **끌어들이는 일**로 쓰였다. 축전기가 유전체를 빨아들인 것이다
- 판 가장자리의 휘어진 장(fringing field)이 슬라브 표면의 유도 전하를 잡아당긴다
- 손으로 슬라브를 붙잡고 천천히 넣는다면, 슬라브가 손을 끌고 가며 그만큼 일을 **해 준다**
- 마찰 없이 놓아 주면? 슬라브는 가속되어 들어갔다가 반대쪽으로 나오며 **왕복 진동** 한다
 - 총 에너지 893 pJ은 운동 에너지와 장의 에너지 사이를 오간다

q 고정 + C 증가 $\rightarrow U = q^2/2C$ 감소. 계는 언제나 에너지가 낮아지는 배치를 "선호"한다.

원자 수준에서 보면: 분극

유전체의 분극(polarization): 내부 전기장이 약해지는 이유



극성 유전체는 쌍극자가 정렬하고, 비극성 유전체는 장이 분자를 늘려 쌍극자를 유도한다

두 경우 모두 표면 유도 전하 $\pm q'$ 가 생겨 내부 장을 약하게 만든다

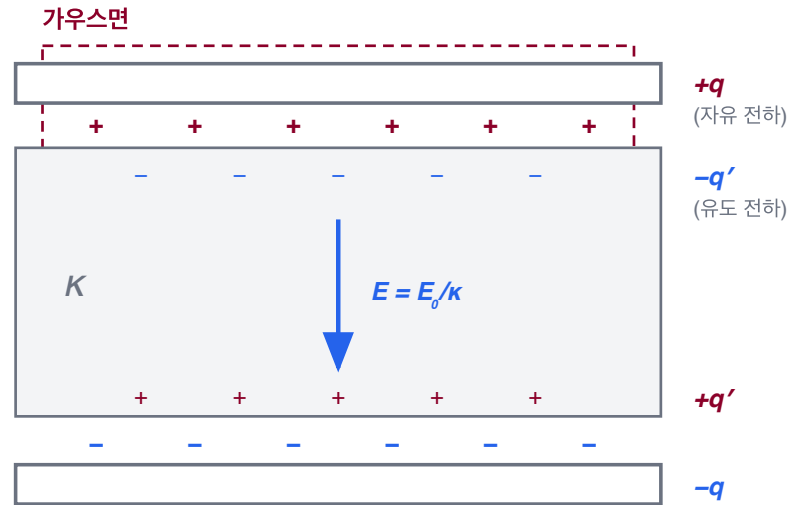
- **극성 유전체(polar dielectric)** : 물처럼 분자가 영구 쌍극자 모멘트를 가짐 $\rightarrow$ 외부 장이 이들을 정렬시킨다 (열운동 때문에 완전하지는 않음)
- **비극성 유전체(nonpolar dielectric)** : 영구 쌍극자가 없어도, 외부 장이 분자의 양·음 전하 중심을 살짝 벌려 쌍극자를 **유도** 한다

두 경우 모두 표면에 **유도 전하** $\pm q'$ 이 생기고, 이들이 만드는 장 $\vec{E}'$ 이 외부 장 $\vec{E}_0$ 와 반대여서 내부의 알짜 장이 $E = E_0 / \kappa$ 로 약해진다.

25.6 유전체와 가우스 법칙

유도 전하를 넣어 다시 쓰는 가우스 법칙

유전체가 있을 때의 가우스 법칙



가우스면이 둘러싼 알짜 전하는 $q - q'$ (자유 전하 + 유도 전하)

$$\epsilon_0 \oint \kappa \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q \quad (\text{우변에는 자유 전하만 쓴다})$$

유전체가 없을 때 : 가우스면은 $+q$ 만 둘러싼다.

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \epsilon_0 E_0 A = q \quad \Rightarrow \quad E_0 = \frac{q}{\epsilon_0 A}$$

유전체를 채웠을 때 : 같은 가우스면이 판의 **자유 전하(free charge)** $+q$ 와 유전체 표면의 **유도 전하(induced charge)** $-q'$ 을 함께 둘러싼다.

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \epsilon_0 E A = q - q' \quad \Rightarrow \quad E = \frac{q - q'}{\epsilon_0 A}$$

유도 전하의 크기

유전체의 효과는 장을 κ 분의 1로 줄이는 것이었다:

$$E = \frac{E_0}{\kappa} = \frac{q}{\kappa \epsilon_0 A}$$

두 표현을 비교하면:

$$\frac{q - q'}{\epsilon_0 A} = \frac{q}{\kappa \epsilon_0 A} \Rightarrow q - q' = \frac{q}{\kappa} \Rightarrow q' = q \left(1 - \frac{1}{\kappa} \right)$$

- 유도 전하는 항상 자유 전하보다 **작다** ($q' < q$)
- $\kappa = 1$ (진공)이면 $q' = 0$ — 유도 전하 없음
- κ 가 클수록 q' 이 q 에 가까워진다 (도체는 $\kappa \rightarrow \infty$ 인 극한처럼 행동)

일반화된 가우스 법칙

$q - q' = q/\kappa$ 를 가우스 법칙에 넣으면 유도 전하를 명시적으로 쓸 필요가 없어진다:

$$\boxed{\epsilon_0 \oint \kappa \vec{E} \cdot d\vec{A} = q} \quad (\text{유전체가 있을 때의 가우스 법칙})$$

세 가지 주의점:

1. 플럭스 적분에 $\vec{E}$ 가 아니라 $\kappa \vec{E}$ 가 들어간다 ($\epsilon_0 \kappa \vec{E}$ 를 **전기 변위(electric displacement) $\vec{D}$** 라 부르기도 한다)
2. 우변의 q 는 **자유 전하만** 센다 — 유도 전하는 좌변의 κ 가 자동으로 처리한다
3. κ 는 위치에 따라 다를 수 있으므로 적분 **안에** 둔다. 진공은 $\kappa = 1$ 인 특수한 경우

응용: 유전체가 판 사이를 일부만 채우면

두께 $b < d$ 인 유전체 슬라브가 판 사이 일부만 채우는 경우, 일반화된 가우스 법칙을 구간별로 적용하면:

- 틈(공기)에서는: $\varepsilon_0 E_0 A = q \Rightarrow E_0 = \frac{q}{\varepsilon_0 A}$
- 유전체 안에서는: $\varepsilon_0 \kappa E_1 A = q \Rightarrow E_1 = \frac{q}{\kappa \varepsilon_0 A} = \frac{E_0}{\kappa}$

전위차는 경로를 따라 구간별로 더한다:

$$V = \int_{-}^{+} E ds = E_0(d - b) + E_1 b$$

그리고 $C = q/V$. 결과는 진공일 때보다 크고, 완전히 채웠을 때($\kappa \varepsilon_0 A/d$)보다는 작다. 유도 전하($\pm q'$)는 계산에 등장하지 않는다 — κ 가 이미 처리했다.

Review & Summary

핵심 개념과 공식 (1)

- **축전기** : 절연된 두 도체(판)에 $\pm q$ — 전하와 전위차는 비례한다: $q = CV$
- **전기용량 계산법** : q 가정 $\rightarrow$ 가우스 법칙으로 $E \rightarrow$ 적분으로 $V \rightarrow C = q/V$
- 결과는 항상 $\epsilon_0 \times$ (길이 차원의 기하량) — **기하가 C 를 결정한다**

축전기	전기용량
평행판 (면적 A , 간격 d)	$C = \epsilon_0 A/d$
원통형 (길이 L , 반지름 a, b)	$C = 2\pi\epsilon_0 L/\ln(b/a)$
구형 (반지름 a, b)	$C = 4\pi\epsilon_0 ab/(b - a)$
고립된 구 (반지름 R)	$C = 4\pi\epsilon_0 R$

핵심 개념과 공식 (2)

개념	공식
병렬 (par-V: 같은 V)	$C_{\text{eq}} = \sum C_j$
직렬 (seri-q: 같은 q)	$1/C_{\text{eq}} = \sum 1/C_j$
저장 에너지	$U = q^2/2C = \frac{1}{2}CV^2$
에너지 밀도	$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$
유전체	$C = \kappa C_0, \epsilon_0 \rightarrow \kappa \epsilon_0, q' = q(1 - 1/\kappa)$
가우스 법칙 (유전체)	$\epsilon_0 \oint \kappa \vec{E} \cdot d\vec{A} = q$ (자유 전하만)

기억할 것 : 배터리 연결이면 V 고정, 분리면 q 고정. 에너지는 전기장 속에 있고, 유전체는 장을 약하게 하는 대신 그릇(C)을 키운다.