

24장: 전기 퍼텐셜

Electric Potential

힘에서 에너지로

지금까지 우리는 전하 사이의 **힘** (쿨롱 법칙)과, 힘을 매개하는 **전기장(electric field)**을 배웠다. 이번 장에서는 관점을 바꾼다.

- 1학기 역학에서도 힘만으로 풀기 어려운 문제를 **에너지 보존**으로 쉽게 풀었다
- 힘과 장은 **벡터** — 성분을 나누고 방향을 챙겨야 한다
- 에너지는 **스칼라** — 부호만 신경 쓰면 된다

전기력은 **보존력(conservative force)**이다. 따라서 퍼텐셜에너지를 정의할 수 있고, 여기서 한 걸음 더 나아가 "단위 전하당 퍼텐셜에너지"인 **전기 퍼텐셜(electric potential)**을 정의한다.

전압은 일상 어디에나 있다

전압(voltage)이라는 익숙한 단어가 바로 이번 강의 주인공, 전기 퍼텐셜의 차이다.

예시	퍼텐셜 차
신경 세포막 안팎	약 0.07 V
AA 건전지	1.5 V
스마트폰 배터리	3.7 V
가정용 콘센트	220 V
겨울철 정전기 스파크	수천 ~ 수만 V
번개 구름과 지면 사이	수억 V

"몇 볼트"인지가 왜 중요한지, 볼트가 정확히 무엇을 뜻하는지 이번 장에서 배운다.

이번 장의 핵심 세 가지

1. **전기 퍼텐셜의 정의** : 단위 전하당 전기 퍼텐셜에너지

$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{-W_{\infty}}{q_0}, \quad U = qV$$

2. **장에서 퍼텐셜 구하기** : 전기장을 선적분하면 퍼텐셜 차가 나온다

$$V_f - V_i = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

3. **퍼텐셜에서 장 구하기** : 퍼텐셜의 변화율이 전기장이다

$$E_s = -\frac{\partial V}{\partial s}$$

24.1 전기 퍼텐셜

전기력은 보존력이다

8장에서 배운 내용을 떠올리자. 어떤 힘이 **보존력** 이면:

- 한 일이 **경로와 무관** 하고, 시작점과 끝점만으로 정해진다
- 따라서 그 힘에 대한 **퍼텐셜에너지(potential energy) U** 를 정의할 수 있다

$$U = -W \quad (\text{퍼텐셜에너지})$$

중력이 대표적인 보존력이었다. 실험 결과, **전기력도 보존력** 이다. 그러므로 전기력에 대해서도 퍼텐셜에너지를 정의할 수 있다.

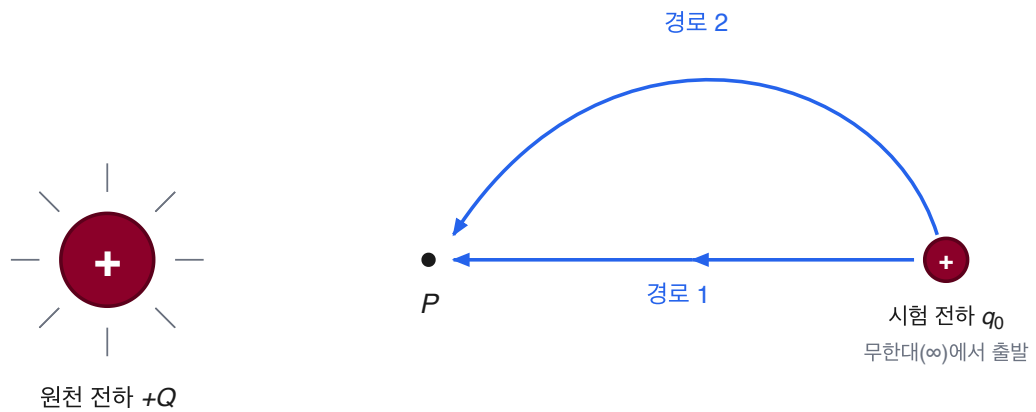
전기 퍼텐셜에너지: 기준 설정

퍼텐셜에너지에는 항상 **기준 배치** ($U = 0$ 인 배치)가 필요하다.

- 기준: 시험 전하 q_0 가 전하 분포에서 **무한히 멀리** 떨어져 있을 때 ($U = 0$)
- 시험 전하를 무한대에서 점 P 까지 가져오는 동안 전기력이 한 일을 W_∞ 라 하면

$$U = -W_\infty$$

무한대에서 P 까지: 전기력이 한 일 W_∞ 는 경로와 무관하다



어떤 경로로 가져와도 전기력이 한 일은 같다: $W_1 = W_2 = W_\infty$

퍼텐셜에너지 $U = -W_\infty$ (기준: 무한대에서 $U = 0$)

전기 퍼텐셜의 정의

U 는 시험 전하 q_0 의 크기에 비례한다. 그래서 q_0 로 나누면 **전하 분포만의 성질**이 남는다. 이것이 **전기 퍼텐셜(electric potential)**이다.

$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{-W_{\infty}}{q_0}$$

- V 는 시험 전하와 **무관**하다 — 시험 전하가 없어도 그 점에 존재한다
- V 는 **스칼라**다 (방향이 없다!)
- V 는 원천 전하의 부호에 따라 양수도 음수도 될 수 있다

퍼텐셜을 알면 퍼텐셜에너지가 나온다

퍼텐셜 V 인 곳에 전하 q 를 놓으면, 그 배치의 전기 퍼텐셜에너지는

$$U = qV$$

여기서 q 는 부호를 포함한다. 두 가지 주의사항:

- **퍼텐셜(potential)** 과 **퍼텐셜에너지(potential energy)** 는 다른 물리량이다 — 단
위부터 다르다 (V vs J)
- 전기 퍼텐셜은 **스칼라** 다. 전기장(벡터)보다 다루기 훨씬 쉽다

단위: 볼트

퍼텐셜의 SI 단위는 J/C이고, 이를 **볼트(volt, V)** 라 부른다.

$$1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}$$

이 정의를 쓰면 전기장의 단위도 새로 쓸 수 있다:

$$1 \text{ N/C} = \left(1 \frac{\text{N}}{\text{C}}\right) \left(\frac{1 \text{ V}}{1 \text{ J/C}}\right) \left(\frac{1 \text{ J}}{1 \text{ N} \cdot \text{m}}\right) = 1 \text{ V/m}$$

앞으로 전기장의 크기는 주로 **V/m** 로 표기한다. "1 m 갈 때 퍼텐셜이 몇 V 변하는가"라는 뜻이다.

퍼텐셜 차와 에너지 변화

전하 q 가 점 i 에서 점 f 로 이동하면, 퍼텐셜은 $\Delta V = V_f - V_i$ 만큼 변하고 퍼텐셜에너지는

$$\Delta U = q \Delta V = q(V_f - V_i)$$

만큼 변한다.

- ΔU 의 부호는 q 와 ΔV 의 부호에 따라 결정된다
- 전기력이 보존력이므로 ΔU 는 **경로와 무관** 하다

장이 하는 일과 운동에너지

보존력의 일반 관계 $W = -\Delta U$ 에 $\Delta U = q \Delta V$ 를 넣으면, 전기장이 전하에 한 일은

$$W = -\Delta U = -q \Delta V$$

전기력만 작용한다면 역학적 에너지가 보존된다 ($U_i + K_i = U_f + K_f$):

$$\Delta K = -\Delta U = -q \Delta V$$

퍼텐셜 차만 알면 힘을 계산하지 않고도 속력 변화를 구할 수 있다!

외력이 함께 작용할 때

전기력 외에 **외력(applied force)** 이 일 W_{app} 을 하면, 에너지 보존은

$$U_i + K_i + W_{\text{app}} = U_f + K_f$$

$$\Delta K = -q \Delta V + W_{\text{app}}$$

특히 이동 전후에 정지해 있는 경우($K_i = K_f$, 천천히 옮기는 경우):

$$W_{\text{app}} = q \Delta V$$

이때 외력이 한 일은 장이 한 일과 크기가 같고 부호가 반대다 ($W_{\text{app}} = -W$).

전자볼트(eV)

원자·핵 물리에서는 줄(J)이 너무 큰 단위다. 그래서 **전자볼트(electron-volt, eV)** 를 쓴다.

기본 전하 e 하나가 정확히 1 V의 퍼텐셜 차를 지날 때의 일:

$$1 \text{ eV} = e(1 \text{ V}) = (1.602 \times 10^{-19} \text{ C})(1 \text{ J/C}) = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$$

- 화학 결합 에너지: 수 eV
- X선 광자: 수만 eV (keV)
- LHC 가속기의 양성자: 수조 eV (TeV)

예제 1: 전자총의 전자 가속

전자현미경의 전자총에서, 정지해 있던 전자(질량 $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg)가 퍼텐셜이 100 V 더 높은 전극으로 끌려가 가속된다. 도착할 때의 속력은?

전자의 전하는 $q = -e$ 이고 $\Delta V = +100$ V이므로:

$$\Delta K = -q \Delta V = -(-1.602 \times 10^{-19})(100) = +1.602 \times 10^{-17} \text{ J} = 100 \text{ eV}$$

정지 상태에서 출발했으므로 $K = \frac{1}{2}mv^2 = 1.602 \times 10^{-17} \text{ J}$:

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2(1.602 \times 10^{-17})}{9.11 \times 10^{-31}}} \approx \boxed{5.9 \times 10^6 \text{ m/s}}$$

빛 속력의 약 2%. 음전하는 **높은 퍼텐셜 쪽으로** 가속된다는 점에 주의하자.

24.2 등퍼텐셜면과 전기장

등퍼텐셜면

퍼텐셜이 같은 점들을 이으면 **등퍼텐셜면(equipotential surface)** 이 된다.

- 같은 면 위에서 전하를 어떻게 움직여도 $V_f = V_i$ 이므로

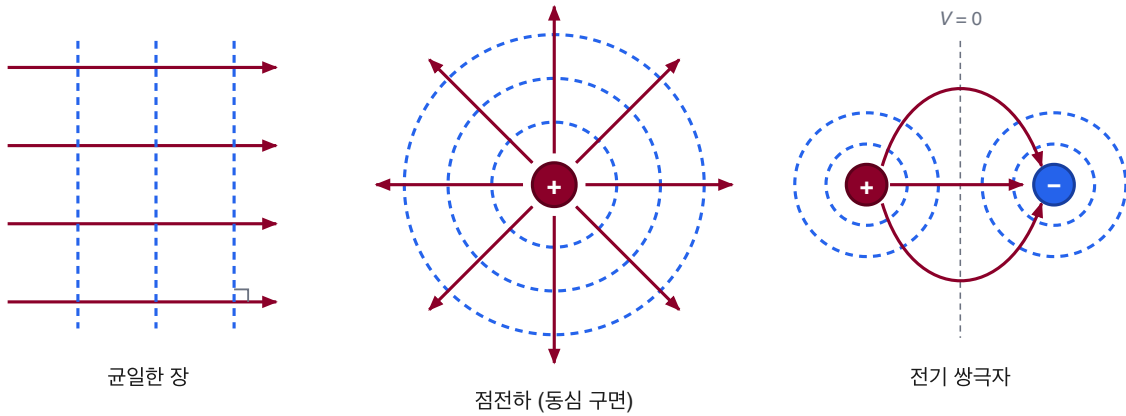
$$W = -q \Delta V = 0$$

- 전기장은 등퍼텐셜면 위의 이동에 대해 **일을 하지 않는다**
- 경로가 면을 벗어났다 돌아와도, 시작점과 끝점이 같은 면 위에 있으면 $W = 0$

지형도의 **등고선** 과 똑같은 아이디어다. 등고선을 따라 걸으면 중력에 대해 일을 하지 않는다.

등퍼텐셜면은 전기력선과 수직이다

전기력선(빨강)은 등퍼텐셜면(파랑 점선)과 항상 수직이다



만약 $\vec{E}$ 가 등퍼텐셜면과 수직이 아니라면? 면에 나란한 성분이 생겨, 면을 따라 움직이는 전하에 일을 하게 된다. 이는 $W \neq 0$ 과 모순이다. 따라서 **전기장은 반드시 등퍼텐셜면에 수직**이다.

장으로부터 퍼텐셜 계산: 설정

전기장 $\vec{E}$ 를 알 때 두 점 사이의 퍼텐셜 차를 구해 보자. 양의 시험 전하 q_0 가 점 i 에서 f 로 임의의 경로를 따라 움직인다.

미소 변위 $d\vec{s}$ 동안 전기력 $\vec{F} = q_0\vec{E}$ 가 하는 일:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

전체 경로에 대해 적분하면:

$$W = q_0 \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

퍼텐셜 차 공식 (핵심!)

$W = -\Delta U = -q_0 \Delta V$ 이므로, q_0 를 소거하면:

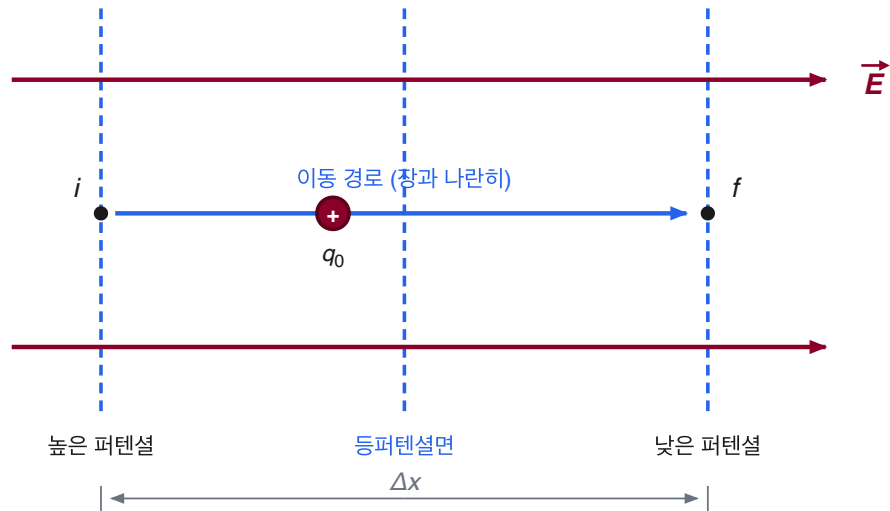
$$V_f - V_i = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

- 적분은 i 와 f 를 잇는 **아무 경로**로 해도 결과가 같다 (보존력!)
- 계산이 쉬운 경로를 골라서 적분하면 된다
- 기준점을 $V_i = 0$ 으로 잡으면 (보통 무한대):

$$V = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

균일한 장에 적용: $\Delta V = -E \Delta x$

균일한 전기장에서의 퍼텐셜 차



$$\Delta V = V_f - V_i = -E \Delta x \text{ (장 방향으로 이동하면 퍼텐셜은 낮아진다)}$$

경로가 $\vec{E}$ 와 나란하면 $\vec{E} \cdot d\vec{s} = E ds$ 이고, E 가 상수이므로:

$$V_f - V_i = -E \int_i^f ds \Rightarrow \boxed{\Delta V = -E \Delta x}$$

전기장 방향으로 가면 퍼텐셜은 낮아진다. 전기장 벡터는 항상 높은 퍼텐셜에서 낮은 퍼텐셜 쪽을 가리킨다.

개념 확인: 경로를 바꿔도 같은 답

균일한장에서 i 에서 거리 d 아래의 f 까지 (장과 나란하게) 가면 $V_f - V_i = -Ed$.

이번엔 꺾인 경로 $i \rightarrow c \rightarrow f$ 로 가 보자 (ic 는 장에 수직, cf 는 장과 45°):

- ic 구간: $\vec{E} \perp d\vec{s}$ 이므로 $\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \rightarrow$ 퍼텐셜 변화 없음
- cf 구간: $\vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cos 45^\circ ds$, 경로 길이는 $d / \cos 45^\circ$

$$V_f - V_i = -E \cos 45^\circ \times \frac{d}{\cos 45^\circ} = -Ed$$

같은 결과 다. 퍼텐셜 차는 경로가 아니라 두 점이 결정한다.

시뮬레이션: 등퍼텐셜선과 전기장 — 전하를 드래그하며 직교 관계 확인

24.3 점전하의 퍼텐셜

유도: 설정

점전하 $q(>0)$ 에서 거리 R 만큼 떨어진 점 P 의 퍼텐셜을 구하자. 시험 전하를 P 에서 **무한대까지** 반지름 방향 직선을 따라 내보낸다.

- $\vec{E}$ 는 반지름 방향, $d\vec{s}$ 도 반지름 방향 $\rightarrow \theta = 0$

$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cos 0 \, ds = E \, dr$$

- i 는 P (거리 R), f 는 무한대 ($V_f = 0$)로 두면:

$$V_f - V_i = - \int_R^\infty E \, dr \Rightarrow 0 - V = - \int_R^\infty E \, dr$$

유도: 적분 계산

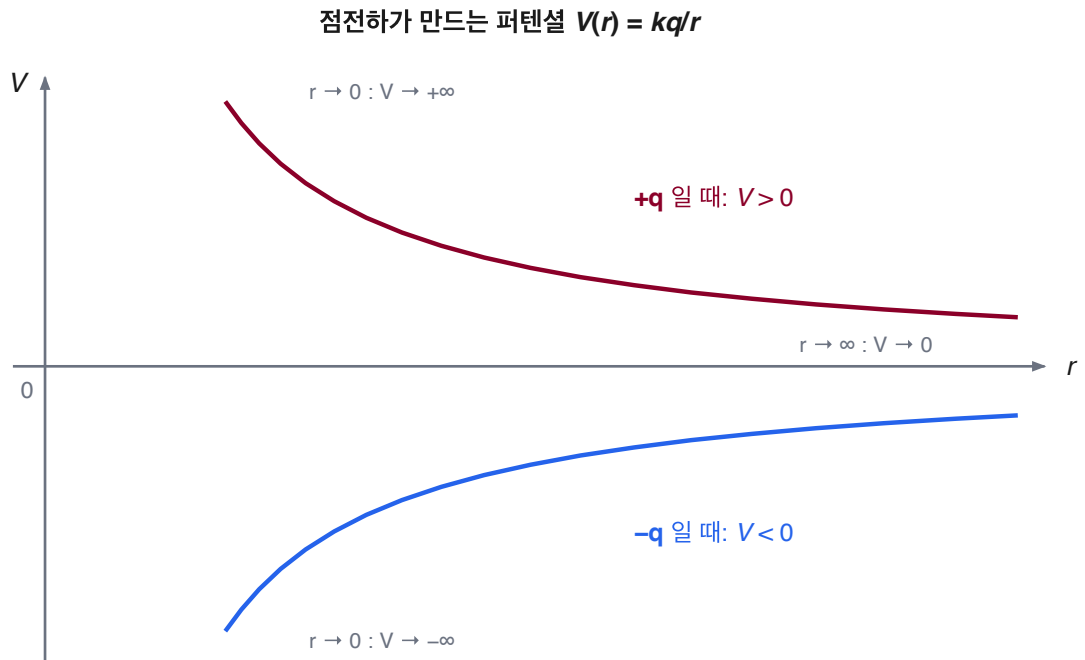
점전하의 전기장 크기 $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$ 를 대입한다:

$$\begin{aligned} 0 - V &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \right]_R^\infty = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(0 - \frac{1}{R} \right) \\ -V &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \end{aligned}$$

R 을 일반적인 거리 r 로 바꾸면:

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}}$$

점전하 퍼텐셜의 특징



- V 의 부호는 q 의 부호와 같다: 양전하는 양의 퍼텐셜, 음전하는 음의 퍼텐셜을 만든다
- $1/r$ 로 감소한다 (전기장의 $1/r^2$ 보다 느리게)
- **구대칭 전하 분포의 바깥**에서도 그대로 성립한다 (껍질 정리: 중심에 모인 점전하처럼 취급)

여러 점전하: 스칼라 합

전하가 n 개일 때, 중첩 원리에 따라 각 전하의 퍼텐셜을 **그냥 더하면** 된다:

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}$$

- 부호를 포함한 **대수 합(algebraic sum)** 이다 — 방향 성분이 필요 없다!
- 전기장(벡터 합)보다 계산이 압도적으로 쉽다. 이것이 퍼텐셜로 문제를 푸는 큰 장점이다

퍼텐셜은 스칼라: 배치를 바꿔도?

반지름 R 인 원 위에 전자 12개가 **균일하게** 놓여 있을 때, 중심 C 의 퍼텐셜은:

$$V = -12 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{R}$$

이제 전자 12개를 원의 한쪽 120° 구간에 **몰아넣으면?**

- 각 전자와 C 사이 거리는 여전히 $R \rightarrow$ 퍼텐셜은 **그대로**
- 반면 전기장은 대칭이 깨져 $\vec{E} = 0$ 에서 $\vec{E} \neq 0$ 으로 **달라진다**

퍼텐셜은 거리만 보고, 방향은 보지 않는다.

예제 2: 정사각형 중심의 퍼텐셜

한 변의 길이가 $d = 1.3 \text{ m}$ 인 정사각형 네 꼭짓점에 전하가 있다: $q_1 = +12$, $q_2 = -24$, $q_3 = +31$, $q_4 = +17$ (단위: nC). 중심 P 의 퍼텐셜은? ($V = 0$ 은 무한대 기준)

각 꼭짓점에서 중심까지 거리는 모두 같다: $r = d/\sqrt{2} = 0.919 \text{ m}$. 전하의 합은

$$\sum q_i = (12 - 24 + 31 + 17) \times 10^{-9} = 36 \times 10^{-9} \text{ C}$$
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sum q_i}{r} = \frac{(8.99 \times 10^9)(36 \times 10^{-9})}{0.919} \approx \boxed{350 \text{ V}}$$

음전하가 있어도 그냥 부호째로 더한다 — 벡터 분해가 전혀 필요 없다.

24.4 쌍극자의 퍼텐셜

설정: 두 전하의 퍼텐셜을 더한다

전기 쌍극자(electric dipole) : 크기가 같고 부호가 반대인 두 전하 $+q$, $-q$ 가 거리 d 만큼 떨어진 배치. 점 P 에서의 퍼텐셜은 두 점전하 퍼텐셜의 합:

$$V = V_{(+)} + V_{(-)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_{(+)}} + \frac{-q}{r_{(-)}} \right)$$

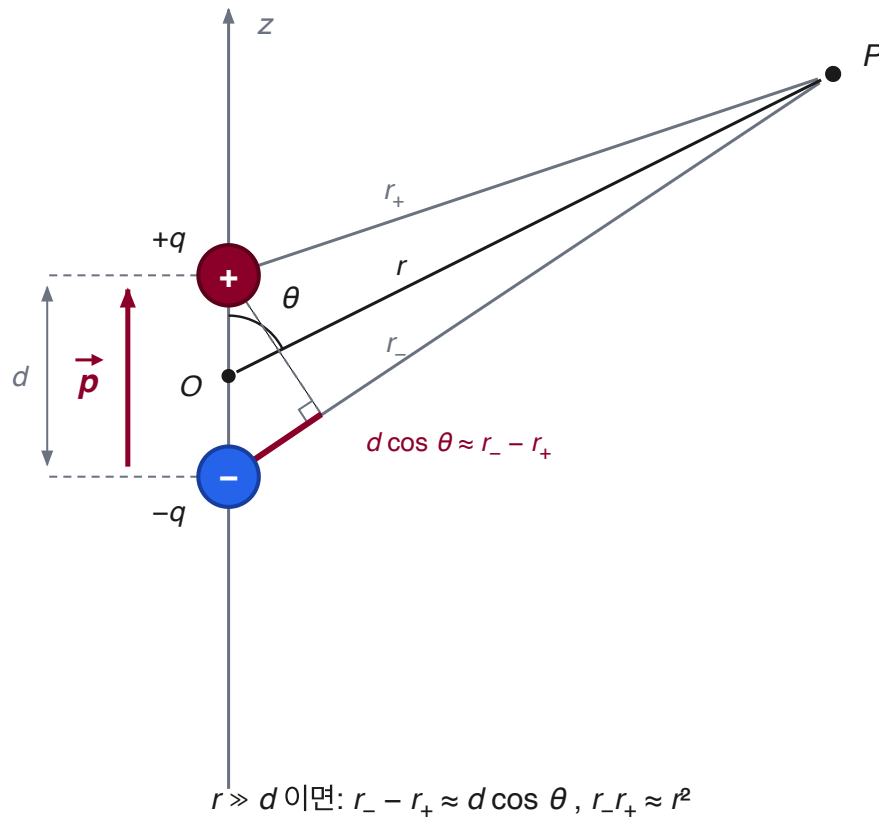
통분하면:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_{(-)} - r_{(+)}}{r_{(-)} r_{(+)}}$$

이제 $r_{(-)} - r_{(+)}$ 와 $r_{(-)}r_{(+)}$ 를 기하학으로 근사한다.

원거리 근사 ($r \gg d$)

전기 쌍극자가 점 P 에 만드는 퍼텐셜: 기하학



멀리서 보면 P 로 가는 두 직선은 거의 평행하다. 직각삼각형에서:

$$r_{(-)} - r_{(+)} \approx d \cos \theta, \quad r_{(-)} r_{(+)} \approx r^2$$

쌍극자 퍼텐셜 공식

근사를 대입하면:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2}$$

$p = qd$ (**쌍극자 모멘트**의 크기, $\vec{p}$ 는 $-q$ 에서 $+q$ 방향)를 쓰면:

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}} \quad (r \gg d)$$

- $\vec{p}$ 방향의 축 위($\theta = 0$)에서 최대, 반대쪽($\theta = 180^\circ$)에서 최소(음수)
- 수직 이등분면($\theta = 90^\circ$)에서는 $V = 0$ — 두 전하의 기여가 정확히 상쇄
- $1/r^2$ 로 감소: 점전하($1/r$)보다 빨리 사라진다 — 멀리서 보면 알짜 전하가 0이기 때문

유도 쌍극자 모멘트

물(H_2O) 같은 극성 분자는 **영구 쌍극자 모멘트** 를 가진다. 그런데 대칭적인 원자나 **비극성 분자** 도 쌍극자가 될 수 있다:

- 외부 전기장 $\vec{E}$ 를 걸면 전자 구름이 장의 반대 방향으로 쏠린다
- 양전하 중심과 음전하 중심이 어긋난다 $\rightarrow \vec{E}$ 방향의 쌍극자 모멘트 $\vec{p}$ 발생

이렇게 생긴 모멘트를 **유도 쌍극자 모멘트(induced dipole moment)**, 이 상태를 **분극(polarized)** 되었다고 한다. 장을 끄면 사라진다. (풍선이 벽에 붙는 이유가 바로 이 유도 분극이다.)

24.5 연속 전하 분포의 퍼텐셜

일반적인 방법

막대·원반처럼 전하가 연속적으로 퍼져 있으면 합 대신 **적분** 한다.

1. 분포를 미소 전하 조각 dq 로 나눈다
2. 각 조각을 점전하로 취급해 P 에서의 퍼텐셜 기여를 쓴다:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r}$$

3. 전체 분포에 대해 적분한다:

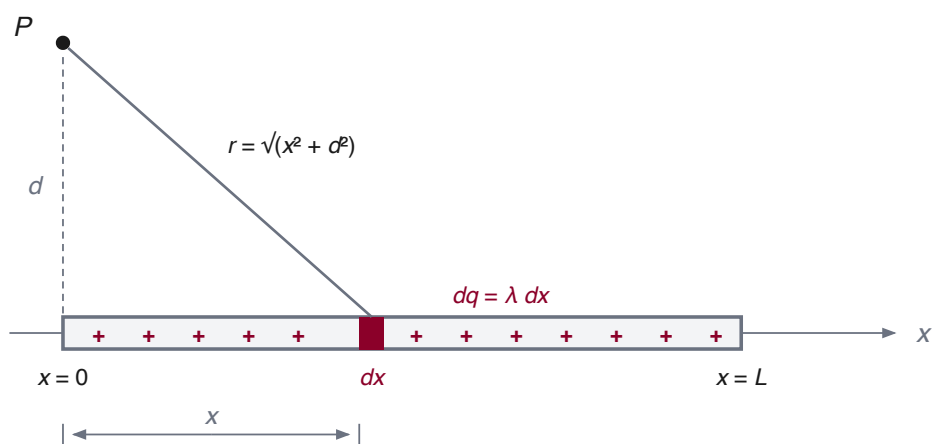
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}$$

dq 는 선전하 밀도로는 λdx , 면전하 밀도로는 σdA 로 바꾼다. **스칼라 적분** 이므로 성분 분해가 필요 없다.

선전하: 설정

길이 L , 균일한 선전하 밀도 $\lambda(>0)$ 인 가는 막대. 왼쪽 끝에서 수직 거리 d 인 점 P 의 퍼텐셜을 구하자.

균일하게 대전된 막대: 점전하 조각 dq 로 나누어 적분



각 조각을 점전하처럼 취급: $dV = \lambda dx / (4\pi\epsilon_0 r) \rightarrow$ 전체는 적분으로 합산

위치 x 의 조각 dx 가 가진 전하는 $dq = \lambda dx$, P 까지의 거리는 $r = \sqrt{x^2 + d^2}$:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{\sqrt{x^2 + d^2}}$$

선전하: 적분

$x = 0$ 부터 $x = L$ 까지 적분한다. $\int dx/\sqrt{x^2 + d^2} = \ln(x + \sqrt{x^2 + d^2})$ 이므로:

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\ln(x + \sqrt{x^2 + d^2}) \right]_0^L$$
$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\ln(L + \sqrt{L^2 + d^2}) - \ln d \right]$$

$\ln A - \ln B = \ln(A/B)$ 를 쓰면:

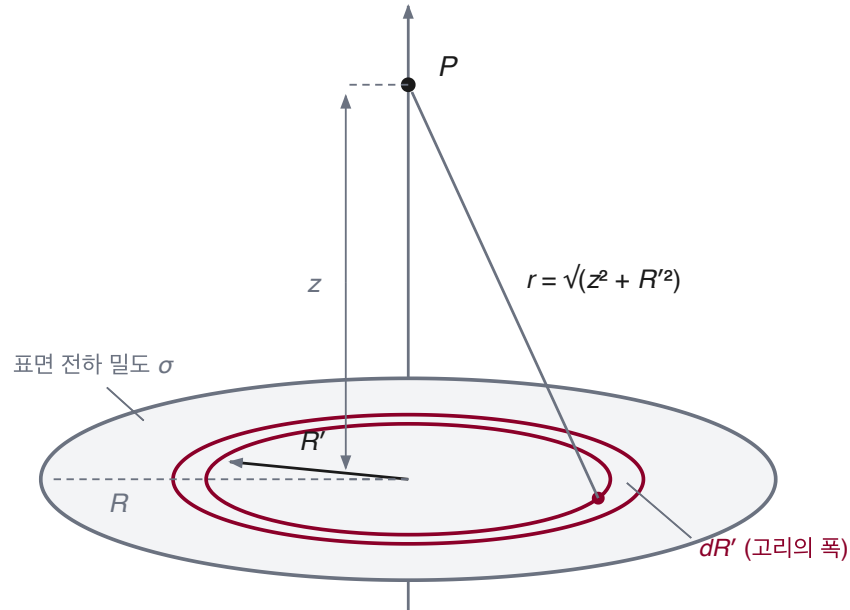
$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{L + \sqrt{L^2 + d^2}}{d}$$

$\lambda > 0$ 이면 로그의 진수가 1보다 커서 $V > 0$ — 부호도 자연스럽게 맞는다.

대전된 원반: 설정

반지름 R , 균일한 표면 전하 밀도 σ 인 원반의 **중심축 위** 점 P (높이 z)의 퍼텐셜.

대전된 원반: 고리(ring) 요소로 적분



고리 위의 모든 전하는 P 에서 같은 거리 r 에 있다 $\rightarrow$ 1차원 적분으로 충분

반지름 R' , 폭 dR' 인 **고리**를 요소로 잡으면 고리의 전하는 $dq = \sigma(2\pi R')(dR')$ 이고, 고리 위 모든 점이 P 에서 같은 거리 $r = \sqrt{z^2 + R'^2}$ 에 있다:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma 2\pi R' dR'}{\sqrt{z^2 + R'^2}}$$

원반: 적분

$R' = 0$ 부터 R 까지 고리들을 더한다 ($2\pi/4\pi = 1/2$ 로 약분):

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{R' dR'}{\sqrt{z^2 + R'^2}}$$

$\int R' dR' / \sqrt{z^2 + R'^2} = \sqrt{z^2 + R'^2}$ 이므로 (z 는 상수):

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{z^2 + R'^2} \right]_0^R$$

$$\boxed{V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{z^2 + R^2} - z \right)} \quad (z \geq 0)$$

2차원 분포지만 대칭성 덕분에 1차원 적분으로 끝났다.

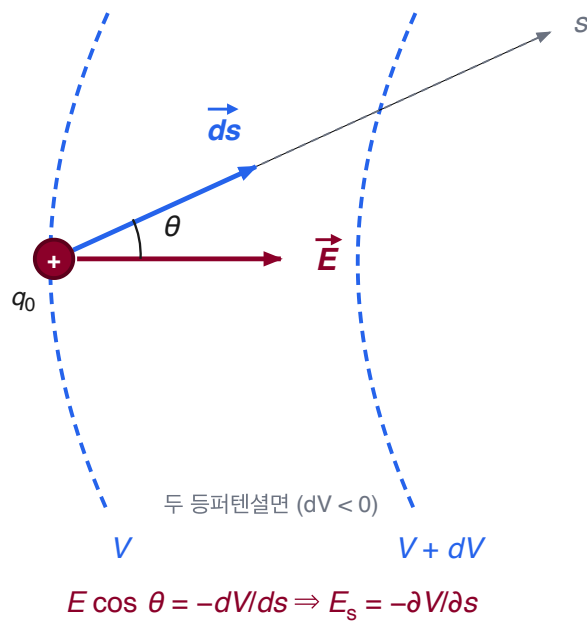
24.6 퍼텐셜로부터 전기장 계산

반대 방향으로 가기

24.2절에서는 $\vec{E}$ 에서 V 를 얻었다. 이번에는 거꾸로, $V(x, y, z)$ 를 알 때 $\vec{E}$ 를 구한다.

그림으로는 답이 이미 보인다: 등퍼텐셜면들을 그리면 $\vec{E}$ 는 그 면에 **수직** 이고, 면이 **조밀할수록** 장이 세다. 이를 수식으로 옮기자.

퍼텐셜의 변화율에서 전기장을 얻는다



유도

시험 전하 q_0 가 한 등퍼텐셜면에서 이웃 면으로 변위 $d\vec{s}$ 만큼 움직인다. 장이 한 일을 두 가지로 쓴다.

- 퍼텐셜 차로: $W = -q_0 dV$
- 힘과 변위의 내적으로: $W = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s} = q_0 E \cos \theta ds$

두 표현이 같아야 하므로:

$$-q_0 dV = q_0 E \cos \theta ds \Rightarrow E \cos \theta = -\frac{dV}{ds}$$

$E \cos \theta$ 는 $d\vec{s}$ 방향의 $\vec{E}$ 성분이므로:

$$\boxed{E_s = -\frac{\partial V}{\partial s}}$$

성분별 공식

어느 방향으로든, $\vec{E}$ 의 그 방향 성분은 퍼텐셜이 그 방향으로 감소하는 비율이다.

s 축을 x, y, z 축으로 잡으면:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

- $V(x, y, z)$ 를 알면 편미분만으로 $\vec{E}$ 전체를 얻는다
- 균일한 장이면 간단히 $E = -\frac{\Delta V}{\Delta s}$ (s 는 등퍼텐셜면에 수직인 방향)
- 등퍼텐셜면에 **나란한** 방향의 성분은 0 (그 방향으로 V 가 안 변하니까)

적용: 원반의 축 위 전기장

방금 구한 원반의 퍼텐셜 $V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{z^2 + R^2} - z)$ 에서 축 방향 전기장을 뽑아 보자.

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{d}{dz} (\sqrt{z^2 + R^2} - z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} - 1 \right)$$

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right)$$

22장에서 쿨롱 법칙으로 힘들게 적분해 얻었던 결과와 **정확히 같다**. 퍼텐셜을 먼저 구하고 미분하는 쪽이 훨씬 쉬울 때가 많다.

24.7 전하계의 전기 퍼텐셜에너지

계의 퍼텐셜에너지 = 조립하는 일

여러 전하로 이루어진 계의 **전기 퍼텐셜에너지** 는:

무한히 멀리 떨어져 정지해 있던 전하들을 현재 배치로 모아 오는 동안 **외력이 해야 하는 일**

- 같은 부호 두 전하: 척력을 거슬러야 함 $\rightarrow$ 외력의 일이 양수 $\rightarrow U > 0$
- 반대 부호 두 전하: 인력이 도와줌 $\rightarrow$ 외력의 일이 음수 $\rightarrow U < 0$

두 입자 계: 유도

q_2 를 고정하고, q_1 을 무한대에서 거리 r 까지 천천히 가져온다. $K_i = K_f = 0$ 이므로 $W_{\text{app}} = q_1 \Delta V$ 이고, 이것이 곧 $U_f - U_i$ 다:

$$U_f - U_i = q_1(V_f - V_i)$$

$U_i = 0$ (기준 배치), V 는 q_2 가 만드는 퍼텐셜이므로 $V_i = 0$ ($r = \infty$), $V_f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r}$.

$$\boxed{U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}} \quad (\text{두 입자 계})$$

전하의 **부호를 그대로 포함** 한다. 같은 부호면 $U > 0$, 다른 부호면 $U < 0$.

셋 이상의 입자: 모든 쌍의 합

세 번째 전하를 가져올 때는 앞의 두 전하가 만든 퍼텐셜을 거슬러 일을 한다. 정리하면:

전하계의 총 퍼텐셜에너지 = **모든 쌍**의 퍼텐셜에너지의 합

$$U = U_{12} + U_{13} + U_{23} + \cdots$$

- 가져오는 순서와 무관하게 같은 결과가 나온다
- 입자가 n 개면 쌍은 $n(n-1)/2$ 개

예제 3: 세 전하 계의 퍼텐셜에너지

한 변 $d = 12 \text{ cm}$ 인 정삼각형 꼭짓점에 $q_1 = +q$, $q_2 = -4q$, $q_3 = +2q$ 가 고정되어 있다 ($q = 150 \text{ nC}$). 이 계의 퍼텐셜에너지는?

세 쌍의 에너지를 모두 더한다 (모든 쌍의 거리는 d):

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{(q)(-4q)}{d} + \frac{(q)(2q)}{d} + \frac{(-4q)(2q)}{d} \right) = -\frac{10q^2}{4\pi\epsilon_0 d}$$
$$U = -\frac{(8.99 \times 10^9)(10)(150 \times 10^{-9})^2}{0.12} \approx \boxed{-1.7 \times 10^{-2} \text{ J} = -17 \text{ mJ}}$$

$U < 0$: 이 배치를 완전히 해체해 무한히 흩어놓으려면 외부에서 $+17 \text{ mJ}$ 의 일을 해줘야 한다 — 묶여 있는(bound) 계다.

예제 4: 알파 입자와 금 원자핵 (러더퍼드 산란)

알파 입자($q_1 = 2e$)가 금 원자핵($q_2 = 79e$)을 향해 정면으로 돌진하여, 중심에서 $r = 9.23 \text{ fm}$ 떨어진 곳에서 순간적으로 멈췄다. 처음(멀리 있을 때) 운동에너지 K_i 는?

역학적 에너지 보존: $K_i + U_i = K_f + U_f$ 에서 $U_i = 0$ (멀리), $K_f = 0$ (정지):

$$K_i = U_f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(2e)(79e)}{r} = \frac{(8.99 \times 10^9)(158)(1.602 \times 10^{-19})^2}{9.23 \times 10^{-15}}$$

$$K_i = 3.94 \times 10^{-12} \text{ J} \approx \boxed{24.6 \text{ MeV}}$$

운동에너지가 쿨롱 전기 퍼텐셜에너지로 바뀌었다가 다시 튕겨 나온다. 러더퍼드는 이런 분석으로 원자핵의 크기를 추정했다.

24.8 대전된 고립 도체의 퍼텐셜

도체 전체는 하나의 등퍼텐셜

23장에서: 평형 상태의 도체 내부는 $\vec{E} = 0$ 이고, 잉여 전하는 모두 **표면**에 분포한다.
여기에 퍼텐셜 차 공식을 적용하면:

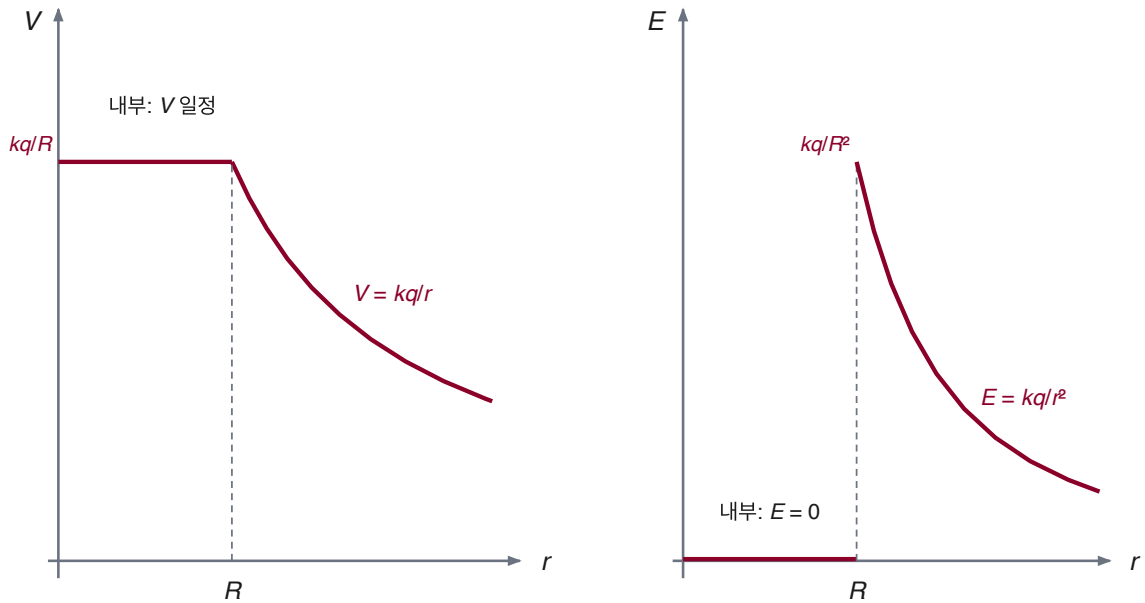
$$V_f - V_i = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (\text{도체 내부 어디든 } \vec{E} = 0)$$

고립 도체의 모든 점(내부든 표면이든)은 **같은 퍼텐셜**에 있다.

도체 내부에 빈 공동이 있어도 마찬가지다. 도체 표면은 언제나 하나의 등퍼텐셜면이고, 표면의 전기장은 표면에 수직이다.

구 껍질의 $V(r)$ 와 $E(r)$

대전된 도체 구 껍질(전하 q , 반지름 R)의 $V(r)$ 와 $E(r)$

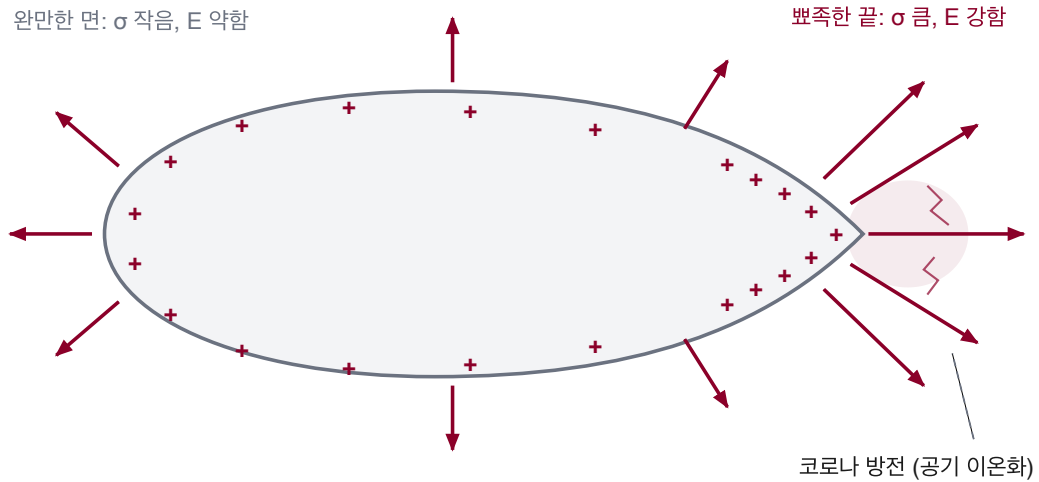


내부에서 $E = 0$ 이므로 퍼텐셜은 표면값 그대로 일정하다 (도체 전체 = 등퍼텐셜)

- 바깥($r > R$): 점전하처럼 $V = kq/r$, $E = kq/r^2$
- 내부($r < R$): $E = 0$ 이지만 V 는 0이 아니라 **표면값 kq/R 그대로 일정**
- E 는 V 를 미분한 것: V 가 평평한 구간($r < R$)에서 $E = 0$ 이 되는 것과 정확히 일치

뾰족한 곳에 전하가 몰린다: 코로나 방전

도체 표면의 전하는 뾰족한 곳에 몰린다



곡률이 클수록(뾰족할수록) 표면 전하 밀도 σ 와 E 가 커져 공기의 절연이 깨질 수 있다

- 비구형 도체에서 표면 전하는 균일하지 않다: **곡률이 큰(뾰족한) 곳**에 밀도 σ 가 높다
- σ 가 크면 표면 전기장 E 도 크다 $\rightarrow$ 주변 공기가 이온화되며 **코로나 방전(corona discharge)** 발생
- **피뢰침**이 뾰족한 이유: 전하를 공기 중으로 흘려보내고, 방전 경로를 유도한다

사람도 도체다



반 데 그라프 발전기(Van de Graaff generator)의 금속 구에 손을 대면 몸 전체가 수만~수십만 V의 등퍼텐셜이 된다. 머리카락마다 같은 부호의 전하가 퍼져 서로 밀어내고, 등퍼텐셜면(두피!)에 수직으로 곤두선다.

- 건조한 날 몸에 쌓인 정전기: 수천~수만 V — 그런데 왜 안 다칠까? 전하량(에너지)이 작기 때문
- 수술실·주유소에서는 이 작은 스파크도 위험해서 정전기 방지 장비를 쓴다

외부 전기장 속의 도체

대전되지 않은 도체를 외부 전기장 속에 놓아도 결론은 같다.

- 전도 전자들이 재배치되어 표면에 유도 전하가 생긴다
- 유도 전하의 장이 내부에서 외부 장을 **정확히 상쇄** → 내부는 $\vec{E} = 0$, 전체가 등퍼텐셜
- 표면의 알짜 전기장은 표면에 수직

번개가 칠 때 자동차 안이 안전한 이유다(고무 타이어 때문이 아니다!). 금속 차체가 전하를 바깥 표면으로만 흘려보내고 내부 공간의 장을 0으로 만든다.

Review & Summary

핵심 개념

- **전기 퍼텐셜** : 단위 전하당 퍼텐셜에너지, $V = U/q_0$ — 스칼라
- **퍼텐셜 차와 에너지** : $\Delta U = q \Delta V$, 장만 작용하면 $\Delta K = -q \Delta V$
- **등퍼텐셜면** : 면 위 이동에는 $W = 0$, 전기력선과 항상 수직
- **장 $\leftrightarrow$ 퍼텐셜** : 적분하면 V , 미분하면 E

$$V_f - V_i = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}, \quad E_s = - \frac{\partial V}{\partial s}$$

- **도체** : 평형 상태의 도체 전체는 하나의 등퍼텐셜 (내부 $E = 0$)

핵심 공식

개념	공식
퍼텐셜의 정의	$V = U/q_0 = -W_\infty/q_0, U = qV$
점전하	$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$ (부호 포함)
여러 점전하	$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$ (대수 합)
쌍극자	$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}$
연속 분포	$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}$
두 전하 계의 에너지	$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}$

기억할 것:

- 전기장은 높은 V 에서 낮은 V 쪽을 가리킨다 ($\Delta V = -E \Delta x$)
- $1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}$, $1 \text{ V/m} = 1 \text{ N/C}$, $1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$
- 퍼텐셜 계산엔 벡터가 필요 없다 — 이것이 퍼텐셜의 힘이다