

23장: 가우스 법칙

Gauss' Law

지금까지의 방법은 힘들었다

22장에서 전하 분포가 만드는 전기장을 구할 때 우리는:

1. 전하 분포를 잘게 쪼개 전하 요소 dq 를 잡고
2. 각 요소가 만드는 장 $d\vec{E}$ 를 쓰고
3. 성분으로 분해한 뒤
4. 전체에 대해 적분했다

고리, 막대, 원판마다 매번 새로 적분... 꽤 고된 작업이었다.

물리학의 중요한 목표 중 하나는 **어려운 문제를 쉽게 푸는 방법**을 찾는 것이다. 그 핵심 도구가 바로 **대칭(symmetry)**이다.

가우스 법칙: 대칭이 좋으면 몇 줄로 끝

독일의 수학자이자 물리학자 **가우스(Carl Friedrich Gauss, 1777-1855)**
가 만든 법칙:

닫힌 곡면을 통과하는 전기장의 양(플럭스)은 그 곡면이 감싸고 있는 **알
짜 전하**로 결정된다.

$$\epsilon_0 \Phi = q_{\text{enc}}$$

- 상자를 열지 않고 **포장지만 보고 내용물을 아는 것**과 같다
- 전하 분포에 좋은 대칭이 있으면, 적분 없이 몇 줄 만에 전기장을 구할 수 있다

미리 보기: 점전하를 감싼 상상의 구면

점전하 $+Q$ 를 중심에 두고 상상의 구면을 그려 보자. 이 상상의 닫힌 곡면을 **가우스면(Gaussian surface)** 이라 부른다.

- 전기장 벡터(필드라인)가 구면을 **밖으로 뚫고** 나간다
- 전하를 $+2Q$ 로 바꾸면 $\rightarrow$ 뚫고 나가는 정도(밀도)가 정확히 **두 배**
- 전하가 $-Q$ 면 $\rightarrow$ 필드라인이 **안으로** 뚫고 들어온다

곡면을 뚫는 전기장의 양만 보고도 내부 전하의 크기와 부호를 알 수 있다. 이것이 가우스 법칙의 전부다.

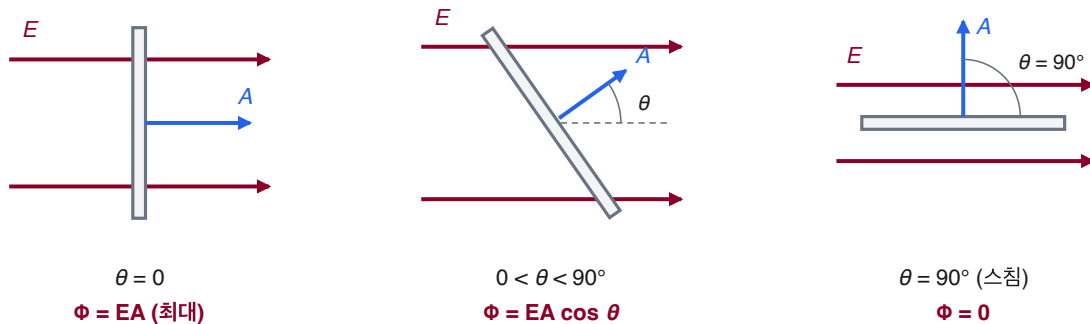
이번 장의 로드맵

1. **전기 플럭스(electric flux) Φ** — "곡면을 뚫는 전기장의 양"을 정량화
2. **가우스 법칙** — $\epsilon_0 \Phi = q_{\text{enc}}$
3. 가우스 법칙 $\leftrightarrow$ **쿨롱 법칙**의 동등성
4. 응용 ① — 대전된 고립 도체 (잉여 전하는 표면에)
5. 응용 ② — 세 가지 대칭: 원통(선전하), 평면(면전하), 구(껍질 정리 증명)

23.1 전기 플럭스

균일한 장, 평평한 면

균일한 전기장 $\vec{E}$ 속에 넓이 A 인 평평한 면을 놓자. 면을 실제로 **뚫고 지나가**는 것은 면에 수직인 성분 $E \cos \theta$ 뿐이다. 면을 따라 스치는 성분은 뚫는 데 기여하지 않는다.



면을 뚫는 전기장의 양을 **전기 플럭스(electric flux)** 라 정의한다:

$$\Phi = (E \cos \theta) A$$

θ 는 전기장과 면의 **수직 방향** 사이의 각도이다.

면적 벡터

각도를 자동으로 처리하는 영리한 표기법: 면에 수직이고 크기가 면적과 같은 **면적 벡터(area vector)** $\vec{A}$ 를 정의한다.

$$\Phi = EA \cos \theta = \vec{E} \cdot \vec{A}$$

내적이 알아서 "뚫는 성분"만 골라낸다.

- $\theta = 0$: $\vec{E} \parallel \vec{A} \rightarrow \Phi = EA$ (최대)
- $\theta = 90^\circ$: 장이 면을 스침 $\rightarrow \Phi = 0$
- 작은 조각(patch)에 대해서는 $d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{A}$

임의의 곡면: 적분으로

휘어진 곡면이나 위치에 따라 변하는 장은 어떻게 할까? 곡면을 아주 작은 **면 요소(area element)** $d\vec{A}$ 들로 쪼갬다. 각 조각은 충분히 작아서 평평하고, 그 위에서 장은 균일하다고 볼 수 있다.

각 조각의 플럭스를 모두 더하면(적분):

$$\boxed{\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}} \quad (\text{총 플럭스})$$

- 플럭스는 **스칼라** 다 (내적의 결과)
- SI 단위: $\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$
- 균일한 장 + 평평한 면이면 적분 없이 $\Phi = EA \cos \theta$

예제 1: 기울어진 평면의 플럭스

크기 $E = 2.0 \times 10^3 \text{ N/C}$ 의 균일한 전기장 속에 넓이 $A = 0.30 \text{ m}^2$ 인 평면이 있다. 면의 수직 방향이 장과 60° 를 이룰 때 플럭스를 구하라.

균일한 장, 평평한 면이므로:

$$\Phi = EA \cos \theta = (2.0 \times 10^3)(0.30) \cos 60^\circ$$

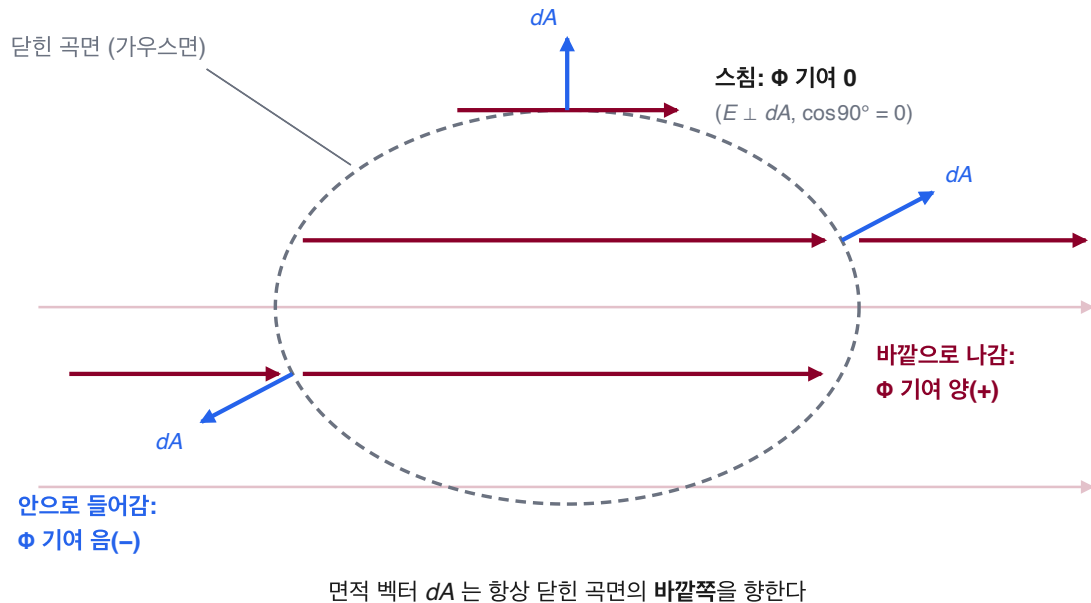
$\cos 60^\circ = 0.5$ 이므로:

$$\Phi = 3.0 \times 10^2 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$$

만약 면을 장에 수직으로 세우면($\theta = 0$) $\Phi = 600 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$ 로 최대가 되고, 면을 장과 나란히 눕히면($\theta = 90^\circ$) 플럭스는 0이다.

닫힌 곡면: 방향의 약속

가우스 법칙에는 **닫힌 곡면(closed surface)** 이 필요하다. 닫힌 곡면에서는 면적 벡터 $d\vec{A}$ 의 방향을 항상 **바깥쪽** 으로 잡기로 약속한다.



- 장이 **밖으로** 나감: $\theta < 90^\circ, \cos \theta > 0 \rightarrow$ 플럭스 기여 **양(+)**
- 장이 **안으로** 들어옴: $\theta > 90^\circ, \cos \theta < 0 \rightarrow$ 플럭스 기여 **음(-)**
- 장이 면을 **스침**: $\theta = 90^\circ \rightarrow$ 기여 **0**

알짜 플럭스

닫힌 곡면 전체에 대한 적분은 적분 기호에 동그라미를 붙여 표시한다:

$$\boxed{\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}} \quad (\text{알짜 플럭스})$$

- 곡면 **전체**에 대해 부호를 포함하여 더한다
- 한쪽으로 들어온 장이 반대쪽으로 그대로 나가면, 음의 기여와 양의 기여가 상쇄되어 알짜 플럭스는 0이 된다

들어온 만큼 나간다면 $\Phi = 0$ — 이 직관이 다음 예제에서 그대로 확인된다.

예제: 균일한 장 속의 닫힌 원통

반지름 R 인 닫힌 원통이 균일한 장 $\vec{E}$ 속에 있고, 원통의 축이 장과 나란하다. 알짜 플럭스는?

곡면을 세 부분으로 나눈다: 왼쪽 뚜껑 a , 옆면 b , 오른쪽 뚜껑 c .

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_a \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_b \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_c \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

왼쪽 뚜껑 a : $d\vec{A}$ 는 바깥쪽(왼쪽), $\vec{E}$ 는 오른쪽 $\rightarrow \theta = 180^\circ$

$$\int_a \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int E(\cos 180^\circ) dA = -EA$$

예제: 닫힌 원통 (계속)

옆면 b : 장이 옆면을 스치며 지나간다 $\rightarrow \theta = 90^\circ$

$$\int_b \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int E(\cos 90^\circ) dA = 0$$

오른쪽 뚜껑 c : $d\vec{A}$ 와 $\vec{E}$ 가 같은 방향 $\rightarrow \theta = 0$

$$\int_c \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int E(\cos 0) dA = +EA$$

셋을 더하면:

$$\Phi = -EA + 0 + EA = \boxed{0}$$

장이 왼쪽으로 들어와 오른쪽으로 모두 빠져나가므로 알짜 플럭스는 0이다.
내부에 전하가 없으니 당연한 결과 — 가우스 법칙의 예고편이다.

생각해보기: 균일한 장 속의 정육면체

한 변의 넓이가 A 인 정육면체가 균일한 장 $\vec{E}$ 속에 있다. 장은 $+z$ 방향이다.

- 장이 나가는 윗면($+z$ 쪽): $\Phi = +EA$
- 장이 들어오는 아랫면($-z$ 쪽): $\Phi = -EA$
- 나머지 네 옆면: 장이 스침 $\rightarrow \Phi = 0$

전체 : $+EA - EA + 0 = 0$

균일한 장 속의 어떤 닫힌 곡면이든, 전하를 품지 않았다면 알짜 플럭스는 항상 0이다.

23.2 가우스 법칙

가우스 법칙

가우스 법칙(Gauss' law) 은 닫힌 곡면(가우스면)을 통과하는 알짜 플럭스 Φ 와 곡면이 **둘러싼 알짜 전하** q_{enc} 를 연결한다:

$$\epsilon_0 \Phi = q_{\text{enc}}$$

플럭스의 정의를 대입하면:

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{\text{enc}}$$

- $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$: 자유 공간의 유전율
- 이 형태는 전하가 진공(또는 공기) 속에 있을 때 성립한다

부호가 알려주는 것

q_{enc} 는 곡면 **내부**의 모든 양전하와 음전하를 부호까지 살려 더한 **대수합**이다.

- $q_{\text{enc}} > 0 \rightarrow$ 알짜 플럭스는 **바깥쪽** (장이 전체적으로 나감)
- $q_{\text{enc}} < 0 \rightarrow$ 알짜 플럭스는 **안쪽** (장이 전체적으로 들어옴)
- $q_{\text{enc}} = 0 \rightarrow$ 알짜 플럭스 **0**

내부 전하의 위치나 배치는 전혀 상관없다. 오직 **알짜량**만이 플럭스를 결정한다.

바깥 전하는 왜 상관없나?

곡면 **바깥**의 전하는 아무리 크고 가까워도 q_{enc} 에 넣지 않는다.

- 바깥 전하가 만드는 필드라인은 곡면의 한쪽으로 **들어와서** 반대쪽으로 **나간다**
- 들어온 만큼(-) 나가므로(+) 알짜 기여는 정확히 0

주의할 점: 적분 속의 $\vec{E}$ 는 안팎 **모든 전하**가 만드는 전체 전기장이다. 그런데도 알짜 플럭스에는 내부 전하만 남는다 — 바깥 전하의 기여가 자동으로 상쇄되기 때문이다.

네 개의 가우스면

크기가 같고 부호가 반대인 두 전하 주위에 가우스면 네 개를 그려 보자.

- S_1 (양전하만 포함): 장이 모든 점에서 밖으로 $\rightarrow \Phi > 0, q_{\text{enc}} = +q$
- S_2 (음전하만 포함): 장이 모든 점에서 안으로 $\rightarrow \Phi < 0, q_{\text{enc}} = -q$
- S_3 (전하 없음): 위로 들어와 아래로 나감 $\rightarrow \Phi = 0, q_{\text{enc}} = 0$
- S_4 (둘 다 포함): 알짜 전하 $+q + (-q) = 0 \rightarrow \Phi = 0$

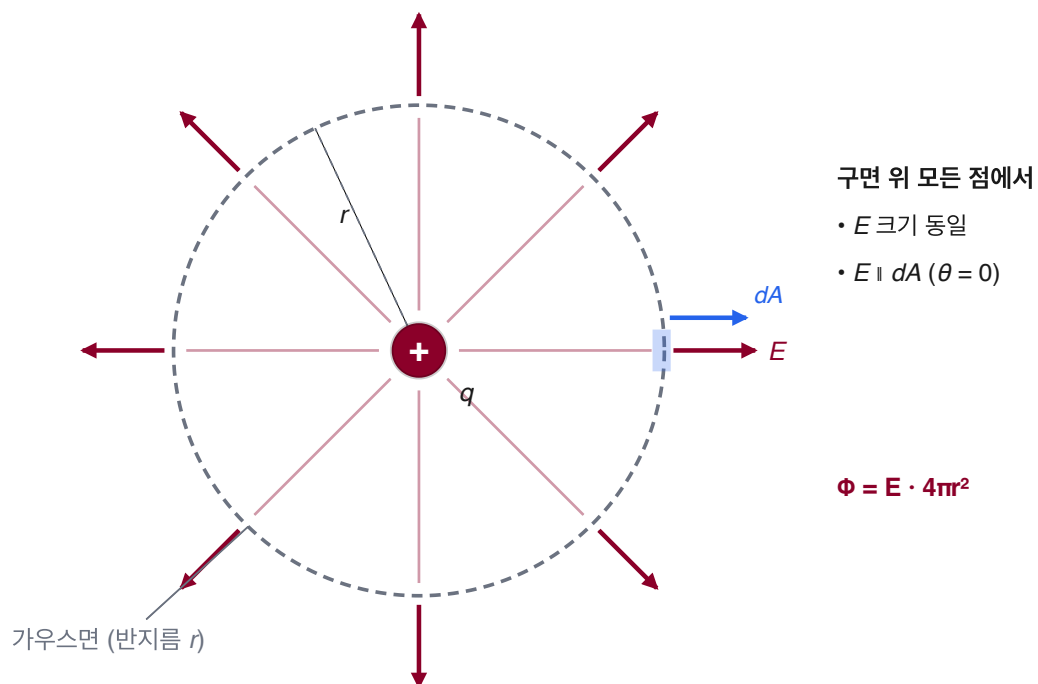
여기에 거대한 전하 Q 를 근처에 가져와도 네 곡면의 알짜 플럭스는 **하나도 변하지 않는다**. Q 는 모든 곡면의 바깥에 있기 때문이다.

시뮬레이션: 가우스 법칙 — 전하를 드래그하며 가우스면의 플럭스 관찰

가우스 법칙 → 쿨롱 법칙

가우스 법칙이 정말 옳다면, 점전하의 전기장(쿨롱 법칙)을 유도할 수 있어야 한다.

점전하 q 의 장은 **구 대칭(spherical symmetry)** — 크기는 거리 r 에만 의존하고 방향은 지름 방향이다. 대칭을 살려 전하를 중심에 둔 반지름 r 의 **가우스 구면**을 잡자.



구면 위 어느 점에서나 (1) E 의 크기가 같고, (2) $\vec{E}$ 와 $d\vec{A}$ 가 나란하다($\theta = 0$).

유도: 적분이 사라진다

가우스 법칙에서 시작한다:

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \varepsilon_0 \oint E \cos 0 dA = \varepsilon_0 \oint E dA = q_{\text{enc}}$$

E 는 구면 위에서 상수이므로 적분 밖으로 나온다. 남은 $\oint dA$ 는 그냥 구의 겉넓이 $4\pi r^2$:

$$\varepsilon_0 E \oint dA = \varepsilon_0 E (4\pi r^2) = q$$

E 에 대해 풀면:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

22장에서 쿨롱 법칙으로 구한 점전하의 전기장과 정확히 같다. **가우스 법칙과 쿨롱 법칙은 동등하다.**

예제 2: 껍질 속의 입자 (a)

반지름 $R = 10\text{ cm}$ 인 플라스틱 구 껍질에 전하 $Q = -16e$ 가 균일하게 퍼져 있고, 중심에 전하 $q = +5e$ 인 입자가 있다. 반지름 $r_1 = 6.0\text{ cm}$ 인 지점의 전기장은?

구 대칭이므로 r_1 을 지나는 **가우스 구면** 을 잡는다. 껍질($R = 10\text{ cm}$)은 이 구면 **바깥** 에 있으므로 $q_{\text{enc}} = +5e$ 뿐이다.

$$E = \frac{q_{\text{enc}}}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} = \frac{5(1.60 \times 10^{-19})}{4\pi(8.85 \times 10^{-12})(0.060)^2}$$

분자는 $8.0 \times 10^{-19}\text{ C}$, 분모는 $(1.11 \times 10^{-10})(3.6 \times 10^{-3}) = 4.0 \times 10^{-13}$:

$E = 2.0 \times 10^{-6}\text{ N/C (바깥 방향)}$

$q_{\text{enc}} > 0$ 이므로 장은 지름 방향 바깥쪽이다.

예제 2: 껍질 속의 입자 (b)

같은 상황에서 껍질 바깥, 반지름 $r_2 = 12.0$ cm인 지점의 전기장은?

이번 가우스 구면은 입자와 껍질을 **모두** 둘러싼다:

$$q_{\text{enc}} = q + Q = 5e + (-16e) = -11e$$

$$E = \frac{|q_{\text{enc}}|}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} = \frac{11(1.60 \times 10^{-19})}{4\pi(8.85 \times 10^{-12})(0.120)^2}$$

분자는 1.76×10^{-18} C, 분모는 $(1.11 \times 10^{-10})(1.44 \times 10^{-2}) = 1.60 \times 10^{-12}$:

$$E = 1.1 \times 10^{-6} \text{ N/C (안쪽 방향)}$$

알짜 전하가 음이므로 이번엔 장이 **안쪽** 을 향한다.

23.3 대전된 고립 도체

잉여 전하는 모두 표면으로 간다

가우스 법칙으로 도체에 관한 중요한 정리를 증명할 수 있다:

고립된 도체에 잉여 전하를 올려놓으면, 그 전하는 **전부 도체의 표면**으로 이동한다. 도체 내부에는 잉여 전하가 전혀 없다.

직관적으로도 그럴듯하다: 같은 부호의 전하는 서로 밀어내므로, 서로 최대한 멀어지려면 표면까지 가야 한다.

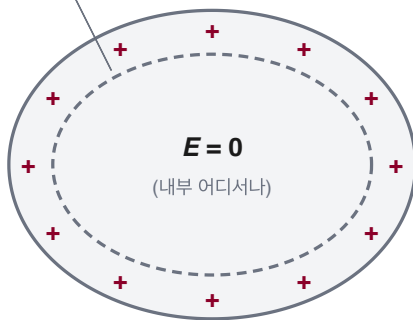
가우스 법칙은 이것을 엄밀하게 증명해 준다. 열쇠는 **도체 내부의 전기장이 0**이라는 사실이다.

증명: 내부 $E = 0$ 이면 내부 전하도 0

1단계 — 정전 평형 상태의 도체 내부에서는 $\vec{E} = 0$ 이다. 만약 내부에 장이 있다면 전도 전자들이 힘을 받아 계속 움직일 것이다(전류 발생). 고립 도체에 그런 영구 전류는 없으므로 내부 장은 0이어야 한다.

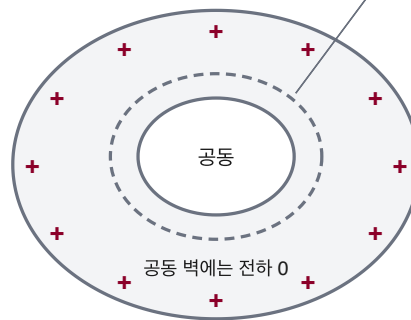
2단계 — 도체 표면 **바로 안쪽** 에 가우스면을 그린다.

가우스면
(표면 바로 안쪽)



(a) 잉여 전하는 모두 **표면**에

가우스면
(공동을 둘러쌘)



(b) 빈 공동이 있어도 마찬가지

3단계 — 가우스면 위 모든 점에서 $\vec{E} = 0$ 이므로 플럭스도 0. 가우스 법칙에 의해 $q_{\text{enc}} = 0$. 잉여 전하는 가우스면 안에 있을 수 없다 → 남은 곳은 **표면** 뿐이다.

공동이 있는 도체

도체 속을 파내어 빈 **공동(cavity)** 을 만들면 어떻게 될까?

- 공동을 둘러싸는 가우스면을 도체 살 속에 그린다
- 도체 내부이므로 가우스면 위에서 $\vec{E} = 0 \rightarrow$ 플럭스 0 $\rightarrow q_{\text{enc}} = 0$
- 따라서 **공동 벽에는 전하가 없다**

전하 분포도, 외부 전기장도 공동을 파내기 전과 완전히 똑같다. 전기장은 도체가 아니라 **전하** 가 만드는 것이고, 도체는 전하가 자리 잡는 길을 제공할 뿐이다.

패러데이 상자: 도체 속은 안전하다

도체로 둘러싸인 공간은 외부 전기장으로부터 차폐된다. 이를 **패러데이 상자 (Faraday cage)** 라 한다.

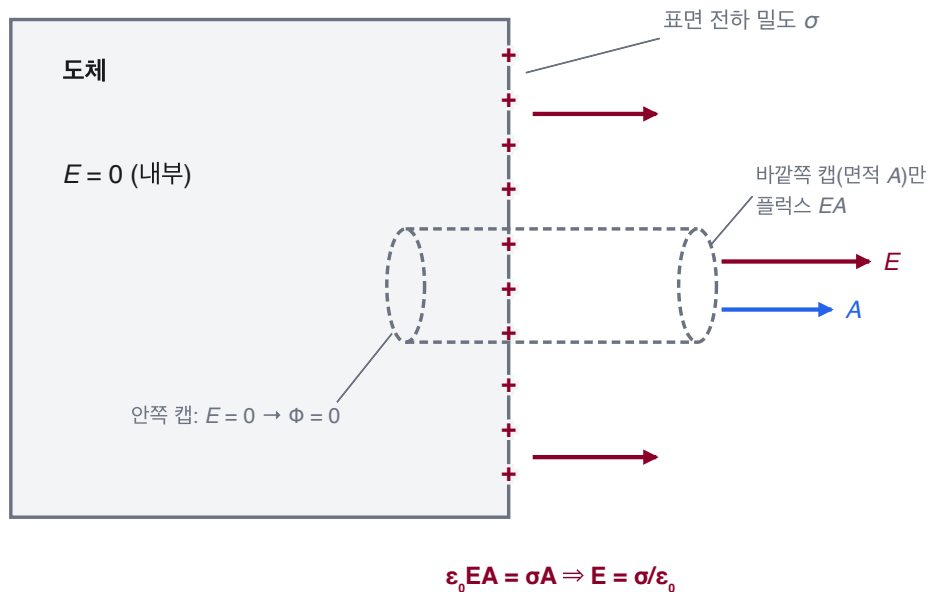


테슬라 코일의 강력한 방전이 금속 그물을 직접 때려도, 안에 있는 사람은 안전하다. 전하가 도체 표면에서 재배치되어 내부 장을 0으로 만들기 때문이다. 자동차가 벼락에 강한 이유, 엘리베이터 안에서 휴대전화가 잘 안 터지는 이유도 같은 원리다.

도체 표면 바로 밖의 전기장

도체 표면의 전하 밀도 σ 는 일반적으로 위치마다 다르다(구가 아니면 균일하지 않다). 하지만 표면 **바로 밖**의 장은 가우스 법칙으로 쉽게 구할 수 있다.

정전 평형에서 표면 밖의 $\vec{E}$ 는 표면에 **수직**이다. 나란한 성분이 있다면 표면 전하가 힘을 받아 움직일 테니까.



작은 원통(필박스)을 표면에 수직으로 꽂는다: 한쪽 캡은 도체 안, 다른 캡은 도체 밖.

$E = \sigma/\epsilon_0$ 유도

필박스를 통과하는 플럭스를 부분별로 따져 보자:

- 안쪽 캡: 도체 내부라 $E = 0 \rightarrow$ 플럭스 0
- 옆면: 안쪽은 장이 없고, 바깥쪽은 장이 옆면을 스침 $\rightarrow$ 플럭스 0
- 바깥쪽 캡(면적 A): 장이 수직으로 통과 $\rightarrow$ 플럭스 EA

감힌 전하는 표면 조각의 σA . 가우스 법칙:

$$\epsilon_0 EA = \sigma A \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}} \quad (\text{도체 표면})$$

간단 확인 — 복사기 드럼 표면 바로 밖의 장이 2.0×10^5 N/C라면: $\sigma = \epsilon_0 E = (8.85 \times 10^{-12})(2.0 \times 10^5) \approx 1.8 \mu\text{C}/\text{m}^2$

개념 예제: 중성 금속 껍질 속의 전하

전기적으로 중성인 금속 구 껍질 안, 중심에서 벗어난 곳에 전하 $-5.0 \mu\text{C}$ 입자가 있다. 껍질의 안팎 벽에는 어떤 전하가 유도될까?

- 껍질 살 속에 가우스면을 그리면 그 위에서 $E = 0 \rightarrow q_{\text{enc}} = 0$
- 따라서 **안쪽 벽** 에 $+5.0 \mu\text{C}$ 가 유도되어야 한다 (입자가 치우쳐 있으므로 분포는 **비균일** — 입자와 가까운 쪽에 몰린다)
- 껍질은 중성이므로 **바깥 벽** 에는 $-5.0 \mu\text{C}$ 가 남는다
- 바깥 벽의 전하는 **균일하게** 분포한다: 안쪽 사정은 도체 살($E=0$)에 가로막혀 바깥에 전달되지 않기 때문

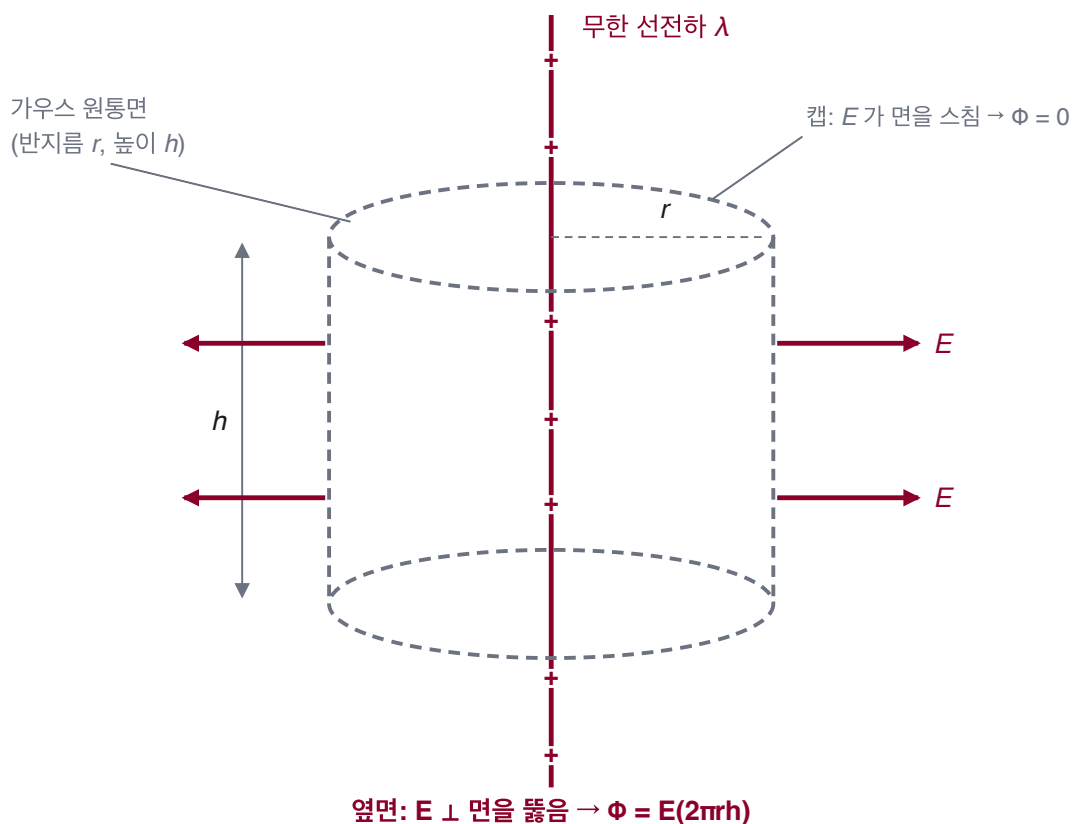
껍질 밖의 필드라인은 입자가 중심에 있는 것처럼 대칭적이다.

23.4 가우스 법칙 적용: 원통 대칭

무한 선전하의 전기장

균일한 선전하 밀도 λ (C/m)를 가진 무한히 긴 직선 전하를 생각하자. 축에서 거리 r 인 곳의 전기장은?

대칭 분석: 선이 무한히 길고 균일하므로, 장은 어느 지점에서나 **지름 방향** ($\lambda > 0$ 이면 바깥쪽)이고 크기는 r 에만 의존한다 — **원통 대칭(cylindrical symmetry)** 이다.



대칭에 맞는 가우스면: 선을 축으로 하는 반지름 r , 높이 h 의 **동축 원통**.

유도: $E = \lambda / (2\pi\epsilon_0 r)$

플럭스를 부분별로 계산한다:

- 위·아래 **캡**: 장이 지름 방향이라 캡 면을 스침 $\rightarrow$ 플럭스 0
- **옆면**: 모든 점에서 $\vec{E} \parallel d\vec{A}$, 크기 일정 $\rightarrow \Phi = E \times (\text{옆면이}) = E(2\pi r h)$

원통이 가둔 전하는 길이 h 만큼의 선전하, 즉 $q_{\text{enc}} = \lambda h$. 가우스 법칙:

$$\epsilon_0 E(2\pi r h) = \lambda h$$

h 가 약분되고:

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}} \quad (\text{무한 선전하})$$

$1/r^2$ 이 아니라 $1/r$ 로 감소한다! 유한한 막대도 끝에서 멀리 떨어진 지점에서 이 식이 좋은 근사가 된다.

예제 3: 번개의 보이지 않는 기둥

번개가 번쩍이기 전, 구름에서 땅으로 전자 기둥이 먼저 내려온다. 기둥의 선전하 밀도는 대략 $\lambda = -1 \times 10^{-3} \text{ C/m}$. 공기는 전기장이 $3 \times 10^6 \text{ N/C}$ 를 넘으면 이온화(절연 파괴)된다. 이온화가 일어나는 기둥의 반지름은?



기둥을 선전하로 근사하면 $E = \lambda / (2\pi\epsilon_0 r)$. 경계 반지름에서 $E = 3 \times 10^6 \text{ N/C}$ 이므로 r 에 대해 풀면:

$$r = \frac{|\lambda|}{2\pi\epsilon_0 E} = \frac{1 \times 10^{-3}}{2\pi(8.85 \times 10^{-12})(3 \times 10^6)} = \boxed{6 \text{ m}}$$

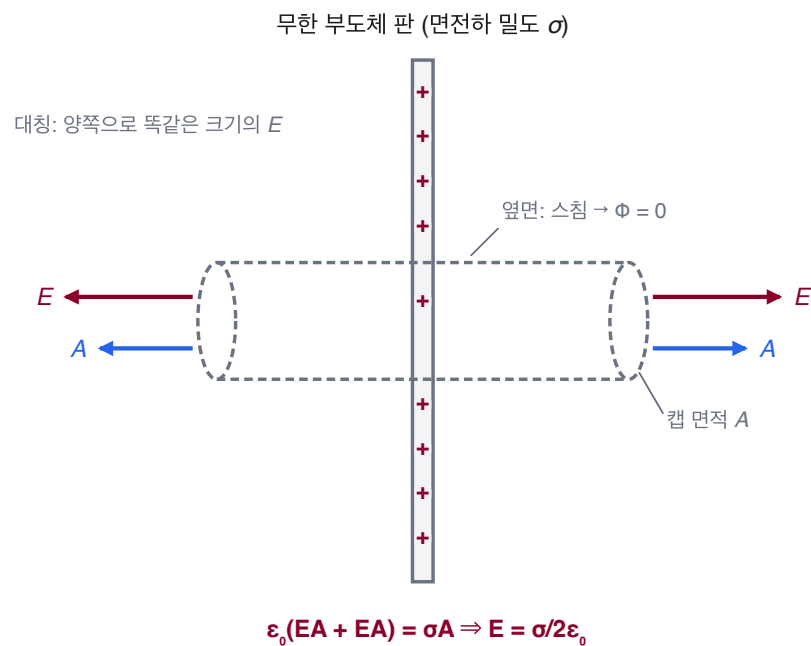
빛나는 부분(약 0.5 m)보다 훨씬 큰, 반지름 6 m의 이온화 기둥이 만들어진 다.

23.5 가우스 법칙 적용: 평면 대칭

무한 부도체 판

균일한 면전하 밀도 σ (C/m²)를 가진 얇은 무한 부도체 판. 판에서 거리 r 인 곳의 장은?

대칭 분석: 판이 무한하고 균일하므로 $\vec{E}$ 는 판에 **수직** 이고, 양쪽으로 똑같은 크기로 뻗는다 ($\sigma > 0$ 이면 판에서 멀어지는 방향).



가우스면: 판을 수직으로 관통하는 원통(필박스). 양쪽 캡(각각 면적 A)이 판에서 같은 거리에 있게 잡는다.

유도: $E = \sigma/2\epsilon_0$

- 양쪽 캡: 장이 수직으로 나감, $\vec{E} \parallel d\vec{A} \rightarrow$ 각각 $+EA$
- 옆면: 장이 스침 $\rightarrow 0$

원통이 가둔 전하는 판 조각의 σA . 가우스 법칙:

$$\epsilon_0(EA + EA) = \sigma A$$

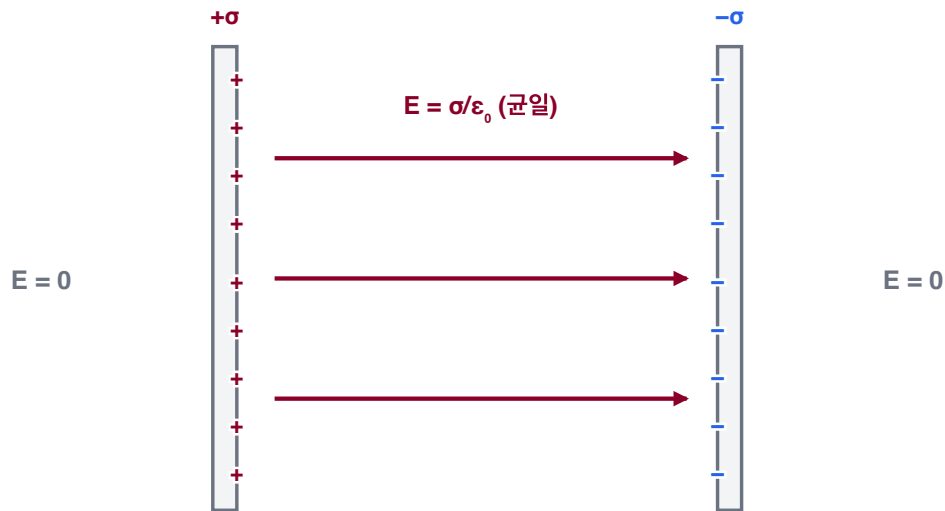
$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}} \quad (\text{무한 부도체 판})$$

놀라운 점: **거리에 무관** 하다! 판이 무한하면 아무리 멀어져도 장이 약해지지 않는다. 실제 유한한 판도, 가장자리에 비해 판에 가까운 지점에서는 이 식이 잘 맞는다.

도체 판 하나, 그리고 둘

도체 판 하나: 잉여 전하는 표면으로 가고, 얇고 넓은 판이면 양쪽 면에 절반씩, 밀도 σ_1 로 퍼진다. 판 밖의 장은 도체 표면 공식 그대로 $E = \sigma_1 / \epsilon_0$.

양(+)판과 음(-)판을 가까이 평행하게 놓으면 상황이 변한다:



두 도체 판을 가까이 놓으면 전하는 마주 보는 안쪽 면에만 모인다

- 서로 끌어당겨 모든 잉여 전하가 **마주 보는 안쪽 면**으로 이동한다
- 안쪽 면의 밀도는 두 배가 되어 $\sigma = 2\sigma_1$
- 판 사이: $E = \sigma / \epsilon_0$ (균일), 판 바깥: $E = 0$

이것이 다음 장들에서 만날 **축전기(capacitor)**의 원형이다.

예제 4: 평행한 두 부도체 판 (a)

한쪽 면에만 전하가 고정된 두 장의 큰 부도체 판이 평행하게 놓여 있다. 면전하 밀도는 $\sigma_{(+)} = 6.8 \mu\text{C}/\text{m}^2$ (양), $\sigma_{(-)} = 4.3 \mu\text{C}/\text{m}^2$ (음). 각 판이 홀로 만드는 장의 크기부터 구하자.

부도체 판이므로 전하가 움직이지 못한다 → 각 판을 **독립적으로** 계산한 뒤 중첩하면 된다.

$$E_{(+)} = \frac{\sigma_{(+)}}{2\varepsilon_0} = \frac{6.8 \times 10^{-6}}{2(8.85 \times 10^{-12})} = 3.84 \times 10^5 \text{ N/C}$$

$$E_{(-)} = \frac{\sigma_{(-)}}{2\varepsilon_0} = \frac{4.3 \times 10^{-6}}{2(8.85 \times 10^{-12})} = 2.43 \times 10^5 \text{ N/C}$$

방향: $E_{(+)}$ 는 양판에서 **멀어지는** 쪽, $E_{(-)}$ 는 음판을 **향하는** 쪽.

예제 4: 평행한 두 부도체 판 (b)

세 영역에서 두 장을 벡터로 더한다 (양판이 왼쪽, 음판이 오른쪽에 있다고 하자):

두 판 사이 — 두 장이 같은 방향(양판→음판)으로 협력:

$$E_B = E_{(+)} + E_{(-)} = 3.84 \times 10^5 + 2.43 \times 10^5 = \boxed{6.3 \times 10^5 \text{ N/C}}$$

왼쪽 바깥 — 두 장이 반대 방향으로 경쟁, 더 센 $E_{(+)}$ 가 이긴다:

$$E_L = E_{(+)} - E_{(-)} = \boxed{1.4 \times 10^5 \text{ N/C}} \quad (\text{왼쪽 방향})$$

오른쪽 바깥 — 마찬가지로 $E_R = 1.4 \times 10^5 \text{ N/C}$ (오른쪽 방향).

도체 판과 달리 바깥 장이 0이 아니다 — 전하가 이동하여 재배치될 수 없기 때문이다.

$\sigma/2\epsilon_0$ 와 σ/ϵ_0 , 헛갈리지 말자

상황	전기장	이유
부도체 판 (밀도 σ)	$\sigma/2\epsilon_0$	플럭스가 양쪽 캡으로 나감
도체 표면 (밀도 σ)	σ/ϵ_0	내부 $E = 0$, 플럭스는 한쪽 캡뿐
평행 도체 판 사이	σ/ϵ_0	안쪽 면 밀도가 $2\sigma_1$ 로 두 배

같은 기호 σ 라도 **어디에 붙은 밀도인지**가 다르다. 인수 2의 정체는 "플럭스가 몇 쪽으로 나가는가"와 "전하가 어느 면에 모였는가"이다.

23.6 가우스 법칙 적용: 구 대칭

껍질 정리, 이번에는 증명한다

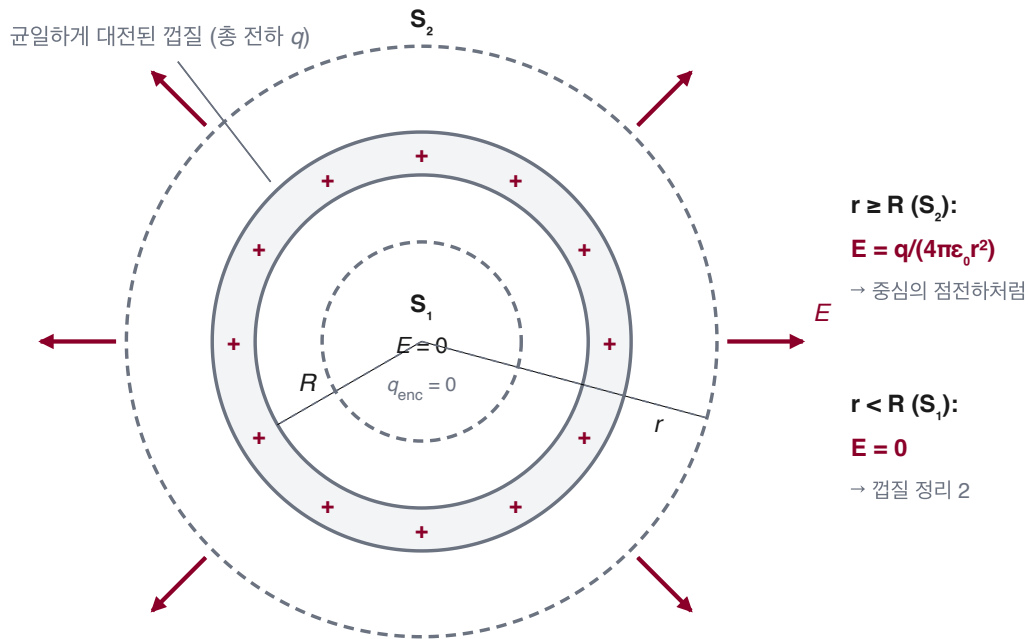
21장에서 증명 없이 사용했던 두 **껍질 정리(shell theorem)** :

1. 균일하게 대전된 구 껍질은 **바깥**의 전하에게, 껍질의 전하가 모두 **중심에 모인 점전하**처럼 작용한다
2. 균일하게 대전된 구 껍질 **안**의 전하는 껍질로부터 알짜 정전기력을 받지 않는다

쿨롱 법칙으로 증명하려면 힘든 적분이 필요하지만, 가우스 법칙을 쓰면 **몇 줄**로 끝난다.

껍질 밖과 안

총 전하 q , 반지름 R 인 얇은 구 껍질에 동심 가우스 구면 두 개를 잡는다.



$S_2 (r \geq R)$: 점전하 유도와 똑같이 $\epsilon_0 E(4\pi r^2) = q$:

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}} \quad (r \geq R) \rightarrow \text{껍질 정리 1 증명}$$

$S_1 (r < R)$: 가우스면이 전하를 하나도 가두지 않음 $\rightarrow q_{\text{enc}} = 0$:

$$\boxed{E = 0} \quad (r < R) \rightarrow \text{껍질 정리 2 증명}$$

임의의 구 대칭 분포: 양파 껍질 논리

전하 밀도 ρ 가 중심 거리 r 에만 의존하는 분포는 얇은 동심 껍질들을 겹겹이 쌓은 것으로 볼 수 있다 (양파처럼).

반지름 r 인 지점의 장을 구할 때, 두 껍질 정리를 적용하면:

- 가우스면 **밖**의 껍질들: 내부에 장을 만들지 않음 $\rightarrow$ 기여 0
- 가우스면 **안**의 껍질들: 모두 중심의 점전하처럼 작용

따라서 안쪽 전하를 q' 라 하면:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{r^2} \quad (r \leq R)$$

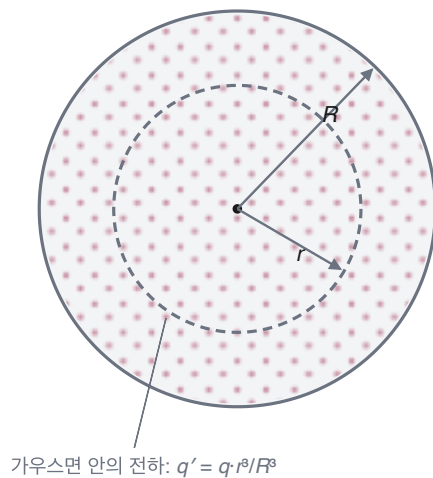
이제 남은 일은 q' 를 구하는 것뿐이다.

균일하게 대전된 속이 찬 구

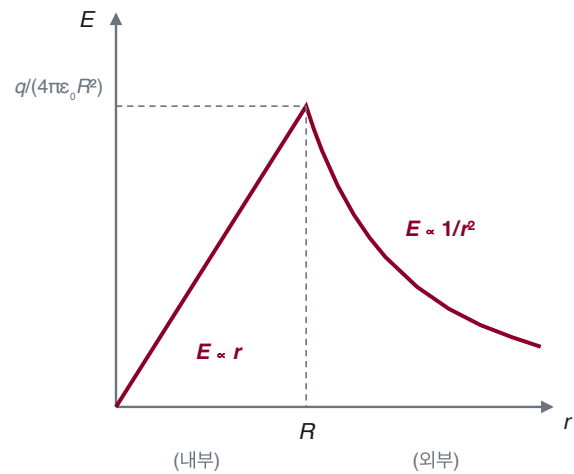
총 전하 q 가 반지름 R 인 구 전체에 **균일하게** 퍼져 있으면, 반지름 r 안의 전하 q' 는 부피에 비례한다:

$$\frac{q'}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow q' = q \frac{r^3}{R^3}$$

균일하게 대전된 구 (총 전하 q)



전기장 크기 $E(r)$



이를 $E = q' / (4\pi\epsilon_0 r^2)$ 에 대입하면:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qr^3/R^3}{r^2} = \boxed{\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right) r} \quad (r \leq R)$$

내부에서는 $E \propto r$

균일 대전 구의 전기장을 정리하면:

- **내부** ($r \leq R$): $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r$ — 중심에서 0, r 에 **비례** 해 커짐
- **외부** ($r \geq R$): $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ — 점전하처럼 $1/r^2$ 로 감소

표면 $r = R$ 에서 두 식은 같은 값 $q/(4\pi\epsilon_0 R^2)$ 를 주며 매끄럽게 이어진다.

내부에서 장이 r 에 비례하는 이유: 안쪽 전하는 r^3 으로 늘고, 거리 제곱은 r^2 로 나누니 $r^3/r^2 = r$.

구 대칭 총정리

분포	위치	전기장 크기
구 껍질 (전하 q , 반지름 R)	$r \geq R$	$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$
구 껍질	$r < R$	0
균일한 구 (전하 q , 반지름 R)	$r \geq R$	$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$
균일한 구	$r \leq R$	$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r$

공통 원리: 바깥에서 보면 모두 중심의 점전하. 안에서는 "내가 서 있는 반지름 안쪽의 전하"만 계산하면 된다.

Review & Summary

핵심 개념

- **전기 플럭스** : 곡면을 뚫는 전기장의 양. $\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$, 닫힌 곡면에서는 $d\vec{A}$ 가 항상 바깥쪽
- **가우스 법칙** : $\epsilon_0 \Phi = q_{\text{enc}}$ — 알짜 플럭스는 내부 알짜 전하만으로 결정. 쿨롱 법칙과 동등하다
- **대전된 고립 도체** : 잉여 전하는 전부 표면에, 내부는 $E = 0$, 표면 밖 장은 표면에 수직
- **대칭 활용 3단계** : ① 대칭으로 $\vec{E}$ 의 방향 파악 $\rightarrow$ ② 대칭에 맞는 가우스면 선택 $\rightarrow$ ③ $\epsilon_0 \Phi = q_{\text{enc}}$ 로 크기 계산

핵심 공식

상황	공식
전기 플럭스	$\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$
가우스 법칙	$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{\text{enc}}$
도체 표면 바로 밖	$E = \sigma / \epsilon_0$
무한 선전하	$E = \lambda / (2\pi\epsilon_0 r)$
무한 부도체 판	$E = \sigma / (2\epsilon_0)$
구 껍질·균일 구 바깥	$E = q / (4\pi\epsilon_0 r^2)$

기억할 것 : 껍질 안은 $E = 0$, 균일 구 안은 $E \propto r$. 다음 장에서는 전기장을 **전위(electric potential)** 로 다시 쓰는 법을 배운다.